МАЙ / ИЮНЬ

ISSN 0130-2221

2016 · № 3

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ВОЗВЕСТИ В КУБ

Перед вами шесть фигур из кубиков $1\times1\times1$. Фигуры в верхнем ряду составлены из пяти таких кубиков, фигуры в нижнем ряду – из четырех кубиков. Сможете ли вы сложить из них куб $3\times3\times3$? Желаем удачи!

Е.Епифанов

КВАНТ

МАЙ ИЮНЬ 2016 № 3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

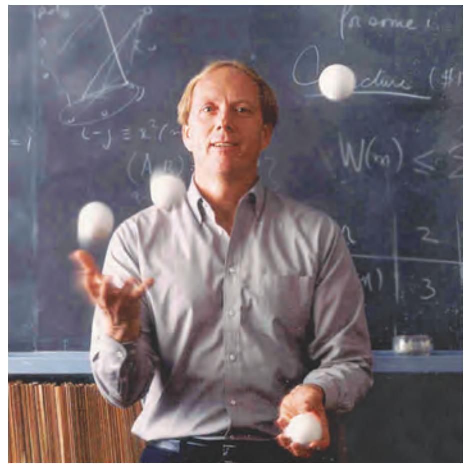
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

В этом году исполняется 80 лет замечательному математику Рональду Грэхему. Он широко известен как крупнейший специалист по комбинаторике, идеи и методы которой используются во всех без исключения областях математики. Наверное, многие знают знаменитую книгу «Конкретная математика», написанную им в соавторстве с Дональдом Кнутом и Ореном Паташником (около 10 лет назад вышел ее перевод на русский язык).

Книга Рональда Грэхема «Начала теории Рамсея» была переведена на русский язык и издана еще в 1984 году, а в «Кванте» №4 за 1988 год опубликовано интервью с ним.

С разрешения автора мы публикуем статью по материалам его доклада, сделанного летом 2014 на конференции Международной федерации математических соревнований в Баранкийе (Колумбия), в переводе С. Львовского.



Рональд Грэхем

Математика и компьютеры: проблемы и перспективы

Р.ГРЭХЕМ

Я ХОТЕЛ БЫ ДАТЬ ОБЗОР НЕКОТОРЫХ РЕзультатов, относящихся к взаимодействию математики и компьютеров. Вы понимаете, что компьютеры есть и будут, и они были чрезвычайно эффективны при работе с самыми разными задачами. Если смотреть с точки зрения математических проблем, то вопрос в том, насколько хорошо компьютеры делают то, что они делают, и каковы перспективы на будущее.

Представляется правильным вспомнить на этой конференции о великом математике Давиде Гильберте. Как вы, наверное, знаете, Гильберт в 1900 году на математическом конгрессе сформулировал 23 проблемы, решением которых, по его мнению (и он оказался более или менее прав), математики будут заняты в наступавшем столетии. В этой связи он также сделал несколько замечаний о роли задач в математике. Он сказал: «Пока в некотором разделе математики наблюдается изобилие задач, это жизнь; когда задачи кончаются, это начало конца». Он также отметил, что именно необходимость решать задачи вынуждает людей изобретать новые методы. Он говорил, что «вам приходится проверять закалку своей стали, вам нужны новые методы и новые подходы». И еще: «Одна из проблем в том, как понять, что такое хорошая задача. Задача должна быть достаточно трудной, чтобы она привлекла ваше внимание, но она не должна быть полностью безнадежной. Часто очень трудно сказать заранее, в какую категорию попадает задача, так что никто вам не скажет «Давай!».

Давид Гильберт (1862–1943)

Итак, я собираюсь дать представление о некоторых задачах, с которыми я давно или относительно недавно сталкивался, и сказать, как компьютеры могут помочь в решении этих задач. Как вы увидите, в некоторых случаях компьютеры оказались очень полезны, в некоторых – они могут принести пользу, но пока что этого не произошло, а применительно к некоторым задачам я сомневаюсь, что от компьютеров может быть хоть какая-нибудь польза – да, это сильное утверждение!

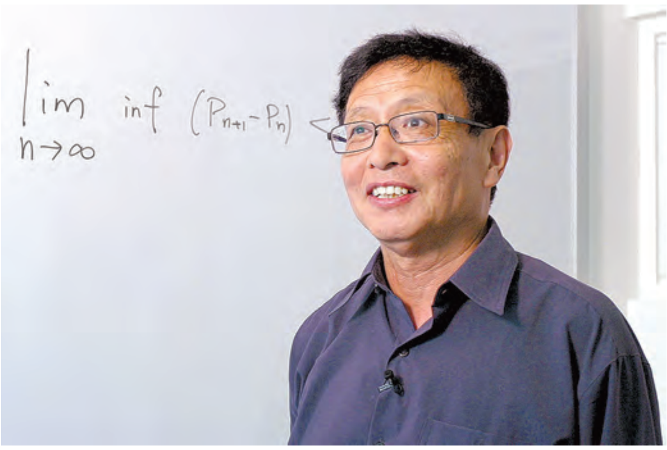
Давайте начнем с начала. У нас есть целые положительные числа, и число p называется простым, если у него нет делителей, кроме 1 и p. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11 и так далее – простые, а у чисел 14, 15 и 100 есть делители, отличные от единицы и их самих, так что эти числа составные. Простые числа – это «кирпичики», из которых собраны все целые числа: всякое целое положительное число единственным образом представляется в виде произведения неубывающей последовательности простых. А сколько всего простых чисел? Бесконечно много. Часто говорят, что в идеальном математическом докладе должно содержаться ровно одно доказательство и ровно одна шутка. Итак, вот знаменитое доказательство, принадлежащее, возможно, Евклиду: если существует лишь конечное число простых $p_1,\ldots,p_n$, то надо посмотреть на число N, равное произведению всех этих $p_1,\ldots,p_n$ плюс единица. По основной теореме арифметики, N – произведение простых чисел, но так как N не делится ни на одно из чисел $p_1,\ldots,p_n$, оно должно делиться на новое простое число, и получаем противоречие. Надо думать, все это доказательство видели. Но большинство слушателей, вероятно, не знакомы с другим результатом, малоизвестным, являющимся предшественником этого результата Евклида, а именно, с тем, что количество составных чисел тоже бесконечно. Доказательство такое: пусть числа $c_1,\ldots,c_k$ составные, берете их произведение, единицу не прибавляете. (*В зале смех.*) Эта шутка, кстати, принадлежит Хендрику Ленстре.

Наибольшее из известных на сегодняшний день простых чисел равно 2 в степени 57 миллионов с чем-то минус единица. В его десятичной записи 17 миллионов цифр; оно получило премию как первое простое число, содержащее более 10 миллионов десятичных знаков. Его открыли в прошлом году в рамках проекта «Поиск простых чисел Мерсенна». Участники этого проекта устанавливали на свои компьютеры специальную программу, и она в фоновом режиме проверяла различные показатели. Вы знаете, что показатель в этом примере (57885161) является простым числом, это одно из простых чисел Мерсенна, и что для того чтобы 2^p-1 было простым числом, само p должно быть простым числом; при проверке этой простоты работало около 32 миллионов процессов; для проверки каждого показателя нужен примерно час. Electronic Frontier Foundation предложило премию в 150 тысяч долларов за первое простое число, в котором будет более ста миллионов десятичных знаков. Вот в этой области компьютеры точно могут кое-что сделать; дальше мы увидим, зачем люди интересуются простыми числами.

Ну хорошо, вернемся к простым числам. Если на них внимательно посмотреть, то можно увидеть, что, похоже, все четные числа, большие 2, являются суммой двух простых, причем видно, что чем число больше, тем больше способов его в таком виде представить. Имеется гипотеза, сформулированная в 1742 году, согласно которой всякое четное число, большее 2, является суммой двух простых. Компьютеры могут в некотором роде заняться этой проблемой; с их помощью гипотеза была проверена для четных чисел, меньших 10^{18}, – выглядит неплохо! Одно британское издательство (Faber & Faber) предложило премию в миллион долларов тому, кто докажет эту гипотезу Гольдбаха к определенному сроку. Но оно наложило дополнительные условия: претендент на премию должен был быть гражданином США или Великобритании в возрасте не ниже 18 лет. Я бы сказал, что если кто-то, кому еще нет восемнадцати, такое докажет, то он заслуживает еще большей премии, но так или иначе эта премия никому не досталась, и довольно об этом.

Более 40 лет назад китайский математик Чэнь Цзинжунь доказал, что всякое достаточно большое четное число можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых простое, а другое разлагается в произведение не более двух простых. Ближе к нашим дням, в 2013 году Хелфготт показал, что всякое нечетное число, большее 5, можно представить в виде суммы трех простых. Я подчеркиваю: не «достаточно большое», а любое! Предыдущей границей было $2\cdot10^{1346}$, так что он ее основательно снизил! И в его доказательстве использовались некоторые компьютерные вычисления.

Посмотрим на простые числа еще раз. Можно заметить, что в начале их последовательности очень часто встречаются пары простых чисел, отличающиеся на 2. Такие простые числа называются близнецами, и существует проблема: доказать, что число пар простых чисел-близнецов

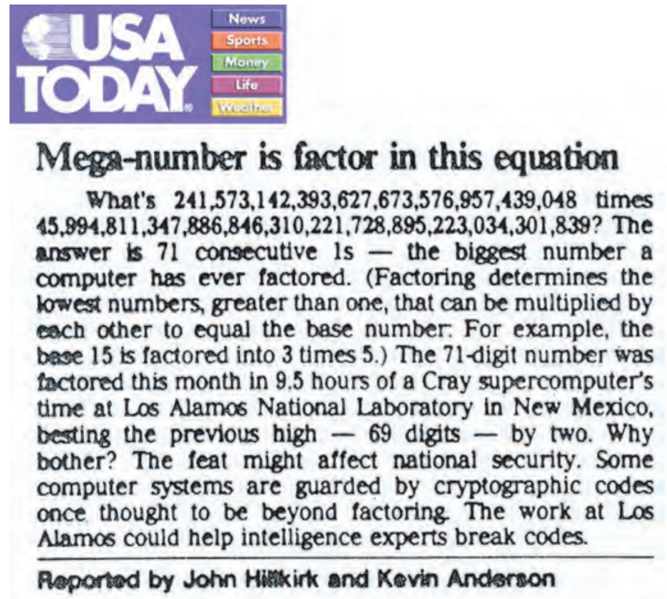


Чжан Итан

бесконечно. Наибольшая известная пара близнецов содержит порядка 200000 десятичных знаков (а именно, это $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$), и опять она была найдена с помощью компьютеров: существуют критерии, с помощью которых проверяют, является ли число простым. В 2013 году Чжан Итан, который работал преподавателем в Нью-Хемпшире, доказал теорему, согласно которой существует такое число N, меньшее 70000000, что бесконечно много пар простых чисел отличаются меньше чем на N. Это было серьезное достижение, использующее новые идеи. Кстати, после этого результата Чжана повысили в должности с ассистента до профессора, так что доказательство пошло ему на пользу. После этого развернулась борьба за то, чтоб это число уменьшить. Ее успехи отмечаются на специальном сайте. Например, несколько недель назад это число удалось снизить с семидесяти миллионов до 246. Я не думаю, что так удастся добраться до разности 2, но по крайней мере доказано, что существует бесконечно много пар простых чисел, отличающихся не более чем на 246.

Основная теорема арифметики гласит, что всякое число можно представить в виде произведения простых, но тогда возникает вопрос, как конкретно это можно сделать. Например, 11 – простое число, 111 разлагается как $3 \cdot 37$, а как обстоят дела с числом 1111 – оно простое? Нет, оно равно $11 \cdot 101$. Ну а если мы выпишем пять единиц подряд? Давайте посмотрим. На три не делится, на пять тоже. На семь?.. В итоге оказывается, что оно равно $41 \cdot 271$. Как видите, чем число больше, тем труднее разложить его на простые множители. Например, если взять шесть единиц подряд. Это простое число? Нет, оно в высшей степени составное, и теперь разлагать числа уже труднее. Существует очень симпатичное приложение для айфона, которое достаточно быстро разлагает на простые множители любое не более чем тридцатипятизначное число. Но вот возьмем число, записываемое 71 единицей. Оно простое? А если нет, как его разложить? Оказывается, это число является произведением двух простых (обычно множителей бывает больше). На эту тему была опубликована статья в «USA today», лет тридцать тому назад. Разложение было найдено на компьютере Cray в Лос-Аламосской лаборатории. Если внимательно посмотреть на эту статью, то можно заметить, что последняя цифра одного из множителей равна 8, что вызывает определенные подозрения. Так что когда читаете газеты, будьте начеку.

Но с какой же целью люди интересуются разложением больших чисел на простые множители? Дело в том, что возникло новое направление



Mega-number is factor in this equation

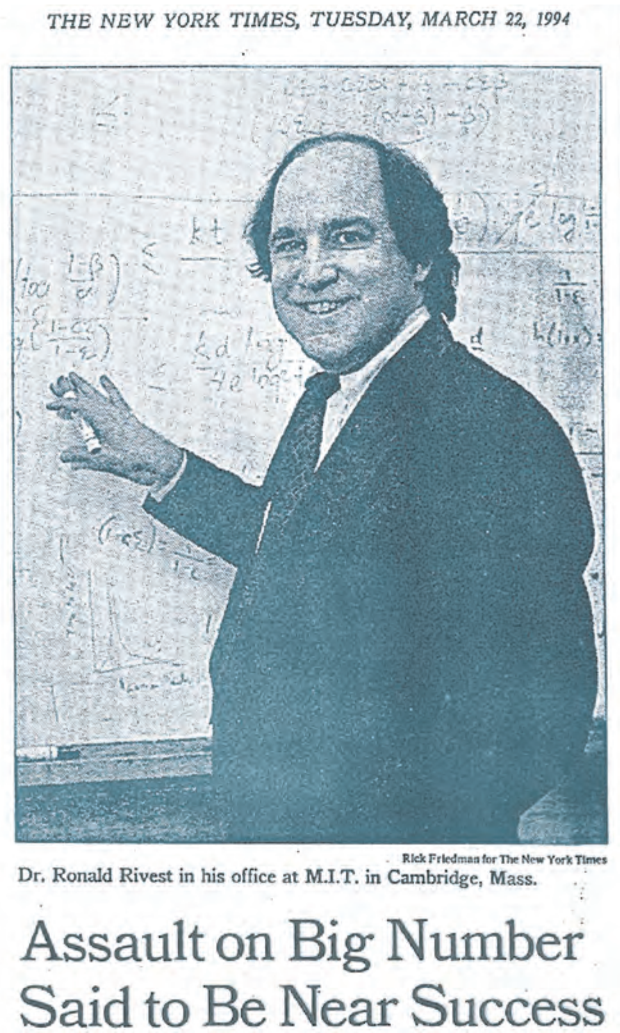
What's 241,573,142,393,627,673,576,957,439,048 times 45,994,811,347,886,846,310,221,728,895,223,034,301,839? The answer is 71 consecutive 1s — the biggest number a computer has ever factored. (Factoring determines the lowest numbers, greater than one, that can be multiplied by each other to equal the base number. For example, the base 15 is factored into 3 times 5.) The 71-digit number was factored this month in 9.5 hours of a Cray supercomputer's time at Los Alamos National Laboratory in New Mexico, besting the previous high — 69 digits — by two. Why bother? The feat might affect national security. Some computer systems are guarded by cryptographic codes once thought to be beyond factoring. The work at Los Alamos could help intelligence experts break codes.

Reported by John Hillkirk and Kevin Anderson

Вырезка из газеты «USA today»

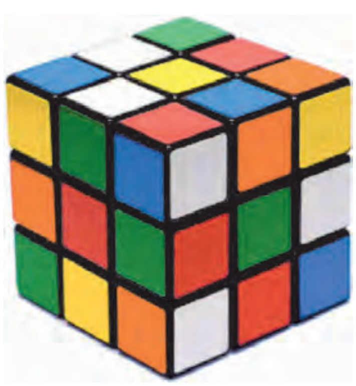
в криптографии – шифрование с открытым ключом, надежность которого основывается на том, что, как считается, разлагать большие числа в произведение простых трудно. На фото рядом – Рон Ривест, фамилия которого входит в аббревиатуру RSA, являющуюся названием для одной из систем шифрования с открытым ключом. Один из способов раскрыть такой шифр – разложить на простые множители большое число. Ривест опубликовал 129-значное число и предложил всем желающим разложить его на множители. Он был уверен, что при использовании известных в то время методов для этого потребуется около $4 \cdot 10^{16}$ лет. Это число было опубликовано в статье в газете «Таймс» около 20 лет тому назад. На самом деле разложение нашли примерно за 20 лет, так что оценка в 10^{16} оказалась, скажем так, излишне пессимистической. В наши дни в очень многих ситуациях, когда требуется соблюсти конфиденциальность (например, при работе с банковскими картами), надежность шифрования зависит от трудности разложения больших чисел. Если обнаружится эффективный способ находить такие разложения, то очень многое изменится.

Оказывается, что число, записываемое 1031 последовательной единицей, является простым. Последнее ли это простое число такого вида? Пол Эрдёш сказал бы, что всякий широко мыслящий человек знает, что простых чисел такого вида бесконечно много, только он не может это доказать. Похоже, что число, записанное 270343 последовательными единицами, может быть простым: это пока не доказано, но оно очень похоже себя ведет, оно удовлетворяет многим необходимым условиям простоты.



На фото — Рональд Ривест

Вот пример. Кажется, в этом году мы празднуем сороковую годовщину изобретения кубика Рубика, в связи с которым компьютеры сделали кое-что из того, что людям недоступно. Поставим вопрос: сколько ходов требуется, чтобы «собрать» кубик, если пользоваться идеальным алгоритмом, идущим, так сказать, от Бога? Оказывается, 43 ходов достаточно по тривиальным причинам. Возможных позиций у кубика Рубика много. Сотрудники Гугла попробовали проверить каждую из них и выяснить, как быстрее всего собрать кубик из этой позиции. Оказалось, что это всегда можно сделать не более чем за 20 ходов. Раньше было известно, что всегда достаточно 26 или 27 ходов, но у Гугла есть большая сеть серверов по всему миру, и эти компьютеры занимались проблемой кубика Рубика в то время, когда нагрузка была невысокой. Так что вот еще один пример того, что компьютеры могут сделать в математике.



Кубик Рубика

Возможно, вы видели и кубики побольше: $4\times4\times4$ или $5\times5\times5$; у меня есть чудесный кубик размером $8\times8\times8$ китайского производства – этой задачей Гугл пока не занимался.

А вот еще неожиданный пример – сейчас вы увидите, в чем его неожиданность. Это *четырнадцать чудесных частных*. Вот список из четырнадцати несократимых дробей:

$$\frac{17}{91},\frac{78}{85},\frac{19}{51},\frac{23}{38},\frac{29}{33},\frac{77}{29},\frac{95}{23},\frac{77}{19},\frac{1}{17},\frac{11}{13},\frac{13}{11},\frac{15}{14},\frac{15}{2},\frac{55}{1}.$$

С этими дробями можно делать следующее. Начнем с числа 2 и будем повторять следующую операцию. Умножаем число на первую из дробей, для которой произведение будет целым числом. В нашем случае, например, мы будем пробовать, пока не дойдем до дроби $\frac{15}{2}$. Если 2 умножить на $\frac{15}{2}$, то получится 15. Теперь повторяем этот процесс с числом 15. Если умножить 15 на какое-нибудь из этих чисел, получится целое? Нет, нет, нет… к счастью, последнее число уже само целое, так что нам придется дойти до самого конца, до $\frac{55}{1}$. Если продолжать этот процесс, то очень скоро вы дойдете до числа 68, которое можно умножить на $\frac{1}{17}$ и получить $4=2^2$. Это степень двойки. Продолжим. Вскоре мы получим $8=2^3$. Следующей степенью двойки будет 2^5, затем 2^7, затем 2^{11}:

$$2\to 2\cdot\frac{15}{2}=$$
$$=15\to 15\cdot\frac{55}{1}=825\to 825\cdot\frac{29}{33}=725\to\ldots$$
$$\ldots=364\to 364\cdot\frac{17}{91}=68\to$$
$$\to 68\cdot\frac{1}{17}=4=2^2\to 4\cdot\frac{15}{2}=30\to\ldots$$
$$\ldots\to 8=2^3\to\ldots\ldots\to 2^5\to\ldots\ldots\to 2^{11}\to\ldots$$

Если записать показатели степени, то получится 2, 3, 5, 7, 11, 13… поразительно! Это в точности последовательность простых чисел. Вот этот набор из четырнадцати дробей дает нам алгоритм, с помощью которого можно породить все простые числа и только их. Когда я говорю об этом факте… знаете, кстати, кто его открыл? Джон Хортон Конвей, у него есть об этом статья, которая называется «Фрактран», по анало-

Джон Хортон Конвей

гии с названием языка программирования «Фортран». Это потому, что в статье показано: всякая рекурсивная функция, любое множество, допускающее рекурсивное определение, можно задать с помощью аналогичного набора дробей. Такой набор эмулирует машину Тьюринга, а в качестве регистров используются показатели простых чисел в разложениях. На самом деле тут происходит процесс, аналогичный проверке числа на простоту с помощью решета Эратосфена. В одной из публикаций Американской математической ассоциации есть интересная статья (ее писал Ричард Гай, но Конвей там является соавтором) под названием «Четырнадцать чудесных частных». Так что получилась такая связь с теорией автоматов. Правда, этот алгоритм порождения простых чисел является очень медленным.

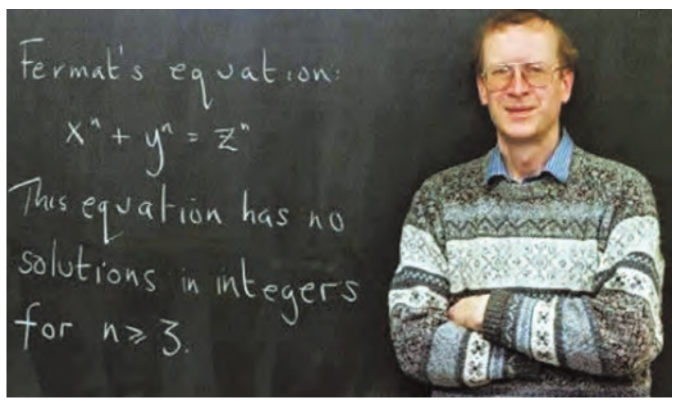
Теперь, с вашего позволения, немного геометрии. Вот знаменитый «египетский» прямоугольный треугольник: $3^2 + 4^2 = 5^2$ – помните теорему Пифагора? Есть и множество других примеров, когда катеты целые, но и гипотенуза тоже целая, например, $5^2 + 12^2 = 13^2$ и так далее. Великая теорема Ферма утверждает, что со степенями, большими двойки, так не бывает: $x^n + y^n$ не может равняться z^n, если целое $n \ge 3$ и ни одно из целых чисел x, y и z не равно нулю. Ферма доказал, что $x^4 + y^4 \ne z^4$, и написал, что поля книги Диофанта слишком малы и доказательство для общего случая не помещается. Эйлер высказал гипотезу, что и сумма *трех* четвертых степеней не может являться четвертой степенью; математики над этой гипотезой напряженно размышляли и пытались ее доказать, но у них ничего не вышло, причем причина неудачи была в высшей степени естественной: эта гипотеза неверна, а когда ты пытаешься доказать что-то неверное, то работа частенько замедляется. Вот минимальный контрпример; он был приведен гарвардским профессором Ноамом Элкисом:

Ноам Элкис

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Существует замечательная история, гласящая, что он и еще один математик, Дон Загье, работали над этой задачей, пытаясь доказать, что решений действительно нет, или, наоборот, найти решение. В теоретической части они оба дошли до одного и того же места, но Элкис еще и очень хороший хакер; он стал проводить компьютерные вычисления с целью получить экспериментальный материал, и в конце концов это привело его к прорыву в задаче: он нашел бесконечно много решений, так что Загье говорит, что теперь он всегда берет в поездки свой компьютер, чтоб больше ничего не упустить. В этой истории компьютер математикам серьезно помог.

Как вы знаете, великую теорему Ферма доказали, это сделал Эндрю Уайлс: видите, какой он счастливый на этой фотографии 1994 года.



Эндрю Уайлс

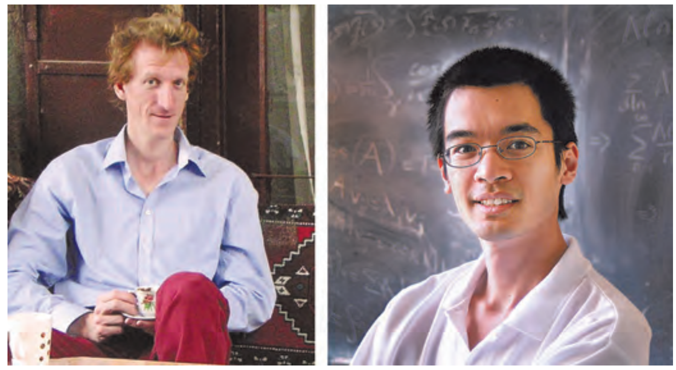
В доказательстве Уайлса был небольшой пробел. Знаете, кстати, как пишут в рефератах? «Эта статья заполняет очень нужный пробел в литературе». В 1995 году этот пробел был заполнен; что же дальше?

Чтобы решить эту задачу, Уайлсу пришлось разработать новые технические средства, и теперь мы можем гордиться тем, что доказана гипотеза Таниямы-Шимуры-Вейля. Конечно, эти новые технические средства дали возможность математикам, таким, как Ричард Тейлор, продвигать исследования дальше, но я на эту тему распространяться не буду.

Теперь заметим, что есть еще одна гипотеза, выдвинутая Энди Билом (A. Beal), которая выглядит как обобщение теоремы Ферма. Именно, если $x^a + y^b = z^c$, где целые $a, b, c \ge 3$ (но они могут быть разными числами), то x, y и z имеют общий делитель, отличный от единицы. Например, $3^3 + 6^3 = 3^5$, или вот пример с бóльшими числами: $85683^5 + 2197^7 = 1485172^4$. Энди Бил объявил через Американское математическое общество премию в миллион долларов за доказательство или опровержение этой гипотезы. Кто же такой Энди Бил? Это богатый техасский банкир, миллиардер, он владеет одним из крупнейших частных банков в Далласе. Кроме того, он очень хорошо играет в техасский покер[1]. У него возникла мысль, что было бы интересно поехать в Лас-Вегас и сразиться там с лучшими мастерами техасского покера. Дело в том, что у этих профессионалов из Лас-Вегаса есть следующее преимущество перед обычным игроком, даже если он играет хорошо: ставки могут быть очень высокими – скажем, двадцать или пятьдесят тысяч долларов, – и если у тебя нет таких свободных денег, то при такой ставке ты не сможешь убедительно блефовать. Но Бил был гораздо богаче, чем они: он мог делать столь высокие ставки, что уже его противники оказались бы в худшем положении! И до какого-то момента такая тактика работала. Когда дошло до 30 миллионов долларов, игра прекратилась, но, по словам Энди Била, «оно того стоило». Майкл Крейг рассказывает эту историю в своей книге «Профессор, банкир и король червей».

Энди Бил является математиком-любителем. Он предложил элементарное доказательство теоремы Ферма, но оно, как и все прочие такие доказательства, оказалось неверным.

В математике, и особенно в теории чисел, одна из, вероятно, самых основных структур – это арифметическая прогрессия. Арифметическая прогрессия – это числа, расположенные через равные промежутки, например, так: 53, 72, 91... или 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089. Заметим, что во втором примере все числа оказались простыми: это пример десяти простых чисел, образующих арифметическую прогрессию. Возникает следующий вопрос, о котором любил напоминать Пол Эрдёш: можно ли найти арифметическую прогрессию произвольной длины, состоящую из простых чисел? Этот вопрос оставался открытым в течение нескольких сотен лет, и лишь совсем недавно, не более десяти лет тому назад, Бен Грин и Терри Тао показали, что действительно существуют арифметические прогрессии какой угодно длины, в которых все элементы – простые числа. В большой степени их работа основывалась на более ранней работе Семереди. Они показали, что существует арифметическая прогрессия длины k, состоящая из простых чисел, не превосходящих $2^{2^{2^{2^{2^{2^{100k}}}}}}$. Это, конечно, очень большое число, сейчас известны гораздо лучшие оценки. А вот и более трудная задача: показать, что существуют длинные прогрессии из последовательных простых чисел. На сегодняшний день рекорд – прогрессия длины 10 с шагом 210 и 93-значным первым членом, запись которого не помещается в строке:



Бен Грин и Терри Тао

100 99697 24697 14247 63778 66555 87969 84032 95093 24689 19004 18036 03417 75890 43417 03348 88215 90672 29719.

Этот пример был найден с помощью очень длинного компьютерного вычисления; открыватели этого примера считают, что прогрессию длины 11 таким способом не найти. Я спрашивал Тао и Грина, что они об этом думают, и они ответили, что у них нет средств для решения такой задачи.

Теперь на совершенно другую тему – о комбинаторике. Надо полагать, все знают, что граф – это множество V вершин плюс множество E ребер. Если вершины x и y соединены ребром, мы будем писать это так: $x \sim y$. Вот некоторые примеры графов. На рисунке 1 вы видите 5-цикл,

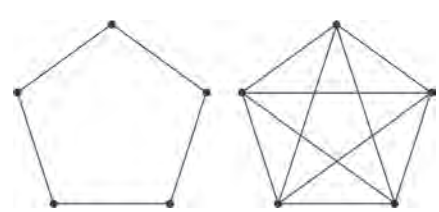


Рис. 1

а также полный граф на пяти вершинах: всевозможные пары точек соединены ребром, у этого графа 10 ребер.

На рисунке 2 – граф Мозера и граф Петерсена. Эти графы часто встречаются в комбинаторике.

[1] Это карточная игра, разновидность покера. По-английски она называется Texas hold'em. – *Прим. ред.*

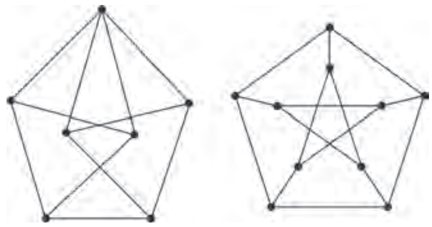


Рис. 2

На рисунке 3 – три графа, которые выглядят по-разному, но на самом деле все они одинаковы: это

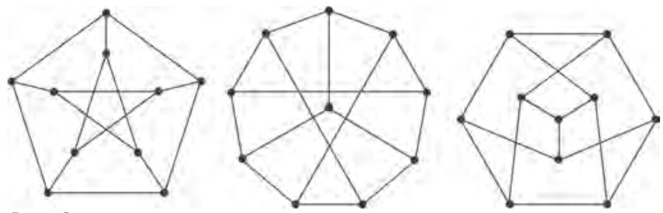


Рис. 3

три разных способа изобразить граф Петерсена.

В теории графов неважно, как вы изображаете граф, важно только, кто с кем соединен. Если можно пометить вершины на двух изображениях графов так, чтобы одни и те же пары вершин были соединены, то графы называются изоморфными. Имеется вычислительная задача, решение которой неизвестно: даны два изображения графов, требуется выяснить, изоморфны ли они. Неизвестно, является ли эта задача NP-полной, и эффективный алгоритм для ее решения тоже неизвестен.

Будем говорить, что отображение множества вершин в множество из r цветов является *r-раскраской*, если соседние вершины всегда окрашены в разные цвета. Эта проблема возникла при изготовлении географических карт: если две страны граничат, они должны быть раскрашены в разные цвета, чтобы их можно было различить. Число $\chi(G)$, называемое *хроматическим числом* графа G – это наименьшее r, для которого существует r-раскраска графа. Можно каждую вершину покрасить в свой цвет, но, возможно, это слишком расточительно: может быть, можно обойтись меньшим количеством цветов?

Например, хроматическое число графа Петерсена равно трем: можно раскрасить его в три цвета (рис.4), но не в два. Для графа Мозера хроматическое число равно четырем (рис.5): трех красок недостаточно. А как обстоят дела с графом на рисунке 6?

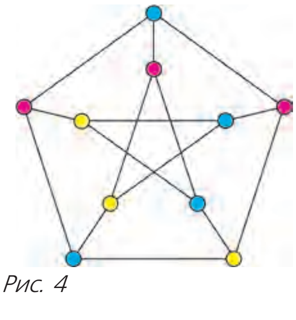


Рис. 4

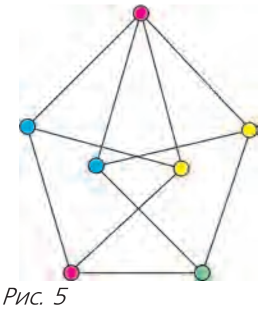


Рис. 5

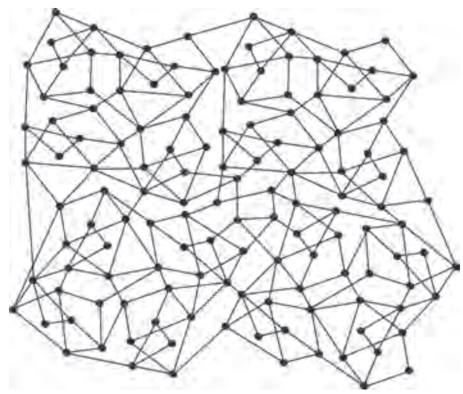


Рис. 6

Я не знаю, это сложный вопрос. Хроматическое число не превосходит двух, если в графе нет цикла нечетной длины. А когда оно равно трем? Никто не знает алгоритма, работающего за полиномиальное время и дающего ответ на этот вопрос. Кажется, на данный момент непонятно, как за такую задачу взяться. Итак, мы переходим к computer science, или информатике.

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы ребра не пересекались. Например, граф Мозера планарен: если растянуть нижнее ребро, то пересечения остальных ребер пропадут (рис.7).

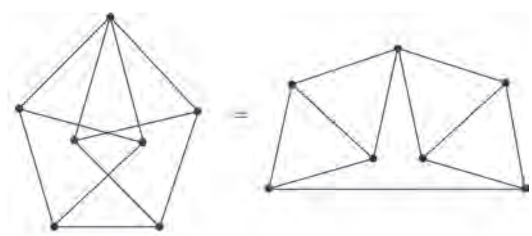


Рис. 7

А вот граф Петерсена не планарен: как его ни рисуй, какие-то ребра пересекутся. Гипотеза о четырех красках, выдвинутая в 1852 году, гласит, что для раскраски вершин планарного графа всегда достаточно четырех красок. Ее доказали в конце XIX века, но через 12 лет в ее доказательстве нашли ошибку, это доказательство было опровергнуто. И только в более недавнее время, в 1976 году, Аппель и Хакен доказали гипотезу о четырех красках, она стала *теоремой о четырех красках*. Не все знают, как это доказательство устроено. На самом деле это не одна статья, а две. С помощью красивой идеи доказательство было сведено к конечному перебору, потребовавшему 15 тысяч часов машинного времени на самых мощных из тогдашних больших компьютеров. Без них бы в этом доказательстве ничего не получилось. Теперь возникает вопрос: можно ли найти более алгебраическое доказательство, в котором все эти вычисления не нужны? Робертсон, Сандерс, Симур и Томас начали в свое время проект, целью которого было передоказать теорему о четырех красках, не используя компьютеров, но воспользоваться компьютерами им все равно пришлось. Им понадобилось три с половиной часа на компьютере Sparc-20, это миллиарды вычислительных операций. Так что теорема о четырех красках по-прежнему верна, но, может быть, у нее можно найти доказательство, которое человек сможет прочесть? Вот Хакен в такое не верит. Он верит в то, что теорема верна, поскольку она проверена для ста миллиардов частных случаев.

У проблемы четырех красок есть частный случай – гипотеза Хадвигера. Эта гипотеза утверждает следующее. Будем говорить, что граф H минор графа G (обозначение: $G > H$), если H можно получить из G с помощью последовательности *удалений* вершин или ребер и *стягиваний* ребер. На рисунке 8 видно, как из графа M

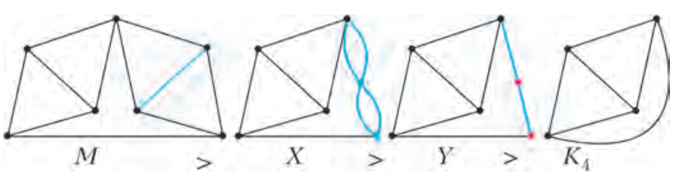


Рис. 8

получается его минор K_4: сначала мы стягиваем ребро, затем соединяем в одно возникающие двойные ребра, затем убираем возникающую лишнюю вершину.

Так вот, гипотеза Хадвигера утверждает, что если хроматическое число графа равно k, то этот граф обязан содержать в качестве минора полный граф с k вершинами (если такой минор есть, то хроматическое число не может быть меньше чем k – это свидетельство в пользу гипотезы). Такую гипотезу конкретно для хроматического числа k обозначают $H(k)$. Эта гипотеза оставалась открытым вопросом в течение длительного времени – может быть, 70 лет. Что же известно? Гипотеза $H(5)$ равносильна теореме о четырех красках. Симур, Робертсон и Томас доказали гипотезу $H(6)$, но дальше у них дело не пошло. Я хотел бы дожить до доказательства гипотезы $H(k)$ для произвольного k, но вы все-таки поторопитесь, ждать двадцать-тридцать лет мне неохота!

В применении компьютеров к математике есть одна пугающая тенденция. Именно, в связном графе (это граф, в котором любые две вершины можно соединить путем) можно определить расстояние между вершинами – это просто количество ребер в соединяющем их кратчайшем пути. Например, в графе Петерсена расстояние между вершинами u и v равно $d(u,v) = 2$, потому что есть соединяющий их путь длины 2, а более короткого нету. Можно также определить *среднее расстояние* между вершинами в графе G, оно обозначается $\bar{d}(G) = \frac{1}{n^2}\sum_{x,y} d_G(x,y)$: мы складываем все попарные расстояния между вершинами и делим на квадрат числа вершин. Для графа Петерсена это число равно 1,5. Другая численная характеристика графа – это его *число независимости*, которое обозначается $\mathrm{ind}(G)$. Это наибольшее количество вершин, которое можно выбрать так, чтоб никакие две не были соединены ребром. Например, для графа Петерсена это число равно четырем. Существует красивая гипотеза, принадлежащая Graffiti, согласно которой для всякого связного графа его число независимости не меньше среднего расстояния: если среднее расстояние большое, то должно найтись много независимых точек. Эта гипотеза доказана моим любимым соавтором Фань Чун. Так вот, это доказательство непростое, но интересно тут то, что Graffiti – это не человек, а компьютерная программа, созданная Симеоном Файтовичем из Хьюстонского университета. Эта программа сформулировала около 6000 гипотез в теории графов и геометрии. Создатель этой программы – специалист в области искусственного интеллекта. По его словам, самое сложное в этих гипотезах, сгенерированных компьютером, – понять, интересна ли та или иная гипотеза. Он взял 50–60 различных инвариантов графа (ну, например: собственные числа матрицы инцидентности), и дальше он с помощью компьютерной программы ищет соотношения между этими инвариантами. Он их проверяет на различных графах, на графах, которые считаются особенно трудными, и если при этих проверках не находится контрпримера, он формулирует гипотезу. Многие из этих гипотез были изучены. Некоторые оказались ложными – был найден «большой» контрпример, некоторые были доказаны или оказались тривиальными, но про многие мы не знаем, верны они или нет. Так что, хотя компьютеры плохо умеют доказывать теоремы, они хорошо умеют формулировать гипотезы. Угонимся ли мы когда-нибудь за ними?

(Окончание следует)

Радуга Декарта–Ньютона–Юнга

А.ПАНОВ

Радуга – это гигантский оптический эксперимент, который природа демонстрирует нам всякий раз, как только складываются подходящие условия: уходящая стена дождя освещается низко стоящим солнцем, и в небе вспыхивают огненные дуги. В Библии радуга явилась Ною в момент окончания всемирного потопа как знамение завета между Богом и людьми. Но нас все-таки больше интересует физическая сторона этого явления, и здесь самый важный результат принадлежит Декарту.

Декартова радуга

В 1637 году появился знаменитый трактат Декарта «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках». В многочисленных приложениях к трактату Декарт продемонстрировал мощь своего метода, и одна из этих демонстраций – это описание механизма образования радуги.

Эксперимент. С помощью своего метода Декарт быстро устанавливает, что для понимания радуги сначала нужно изучить взаимодействие пучка солнечных лучей с отдельной каплей. В качестве такой гигантской капли он берет круглый стеклянный сосуд, наполненный водой, и наблюдает за сосудом, освещенным солнцем. Он обходит вокруг сосуда, обносит его вокруг своей головы и выясняет, что в направлении к солнцу эта освещенная гигантская «капля» излучает целый конус световых лучей с углом полураствора 42° (рис. 1). Уже этого одного факта достаточно, чтобы понять механизм образования радуги.

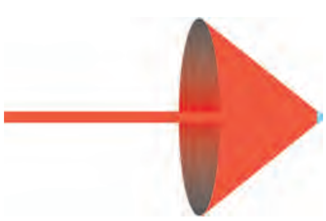


Рис. 1. От солнца на каплю приходит пучок параллельных лучей, в ответ капля излучает целый конус лучей с полураствором 42°

Механизм образования радуги. Итак, уходящая стена дождя освещается появившимся солнцем. Давайте начнем с самой простой картинки и посмотрим, что происходит в вертикальной плоскости, проходящей через солнце и глаз наблюдателя (рис. 2).

Согласно Декарту, каждая капля излучает в направлении солнца целый конус световых лучей. Для капель, лежащих в плоскости рисунка, этот конус представлен двумя лучами: один идет вверх от капли, другой – вниз, оба под углом 42°. Из всех этих лучей в глаз наблюдателя попадают лучи только от двух капель.

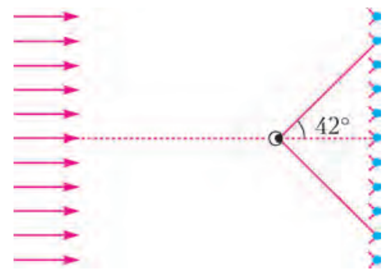


Рис. 2. Стена дождя, лежащая в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка, освещается пучком параллельных лучей, приходящим от солнца

Если же говорить обо всем пространстве в целом, то в глаз наблюдателя попадают лучи от тех капель, которые он сам видит под углом 42° относительно оси солнце–глаз. Эти лучи лежат на конусе с углом полураствора 42°. Наблюдатель воспринимает их как яркую окружность с угловым радиусом 42°, удаленную от него на некоторое расстояние. Это и есть радуга, пока еще не цветная и не обладающая шириной, но тем не менее радуга. Рисунок 2 – самый важный в теории радуги, и с ним нужно хорошенько разобраться.

Упражнение 1

1) Убедитесь, что вид радуги (ее угловой размер) не зависит от расстояния между наблюдателем и стеной дождя.

2) Убедитесь, что капли, не лежащие в одной плоскости, а заполняющие некоторую область в пространстве, все равно будут создавать видимую наблюдателю радугу тех же размеров.

На рисунке 2 не хватает еще одной существенной детали – поверхности земли, ограничивающей обзор реального наблюдателя. Посмотрите на рисунок 3, где добавлена эта поверхность, и ответьте еще на несколько вопросов.

Упражнение 2

1) Какое время суток представлено на рисунке 3? Какую часть радуги видит наблюдатель?

2) Как будет меняться вид радуги, если наблюдатель будет плавно подниматься вверх на аэростате?

3) Как будет выгля-

Рис. 3. Поверхность земли ограничивает обзор наблюдателя

деть радуга, если изменится высота солнца над горизонтом? Будет ли видна радуга, если солнце поднимется достаточно высоко?

Лучи, отвечающие за образование радуги. Солнечные лучи могут по-разному взаимодействовать с каплей. Одни отражаются от передней поверхности капли. Другие, преломляясь, входят в каплю, несколько раз отражаются внутри нее и только потом выходят наружу.

С помощью дополнительных экспериментов, а именно с помощью экранирования световых лучей, Декарт установил, что за образование радуги отвечают те лучи, которые входят в каплю, отражаются от ее задней поверхности и затем выходят из нее (рис.4). Но дальше Декарт пишет, что он так и не понял, почему выходящие из капли лучи образуют конус с углом в $42°$. Не понял, *«пока не взялся за перо и не вычислил ход всех лучей, которые падают на различные точки водяной капли, чтобы узнать, под каким углом они могут попасть в глаз после двух преломлений и одного отражения»*.

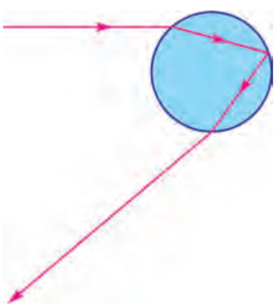


Рис. 4. Луч однократно отражается внутри капли, именно такие лучи отвечают за образование радуги

Чтобы произвести расчет траектории таких световых лучей, нужно знать закон преломления, ведь световой луч преломляется два раза – один раз на входе в каплю и другой раз на выходе.

Закон преломления. Декарт был одним из тех, кто открыл закон преломления. Во всяком случае, он опубликовал его в том же самом трактате «Рассуждение о методе». И вне всяких сомнений он был первым, кто применил его для объяснения радуги.

Закон преломления, сформулированный Декартом, можно записать в виде

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r .$$

Здесь n_1 – это показатель преломления среды, из которой приходит световой луч, а n_2 – показатель преломления среды, в которую он преломляется. Угол i, угол между направлением приходящего светового луча и перпендикуляром к поверхности преломления, – *угол падения*, а r, угол между преломленным лучом и тем же самым перпендикуляром, – *угол преломления* (рис.5). При этом падающий луч, перпендикуляр и преломленный луч лежат в одной плоскости.

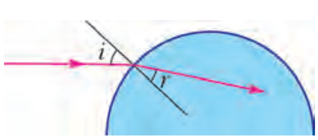


Рис. 5. Преломление светового луча при переходе из одной оптической среду в другую

Преломление на капле. В нашем случае капля расположена в воздухе, показатель преломления которого с большой точностью можно считать равным единице: $n_{\text{воздуха}} = 1$, и пока примем, что $n_{\text{воды}} = 4/3$. Перпендикулярами к поверхности капли служат ее радиусы, а все необходимые углы обозначены на рисунке 6. Угол между выходящим из капли лучом и первоначальным направлением падающего на каплю светового луча обозначен θ, будем называть его *углом выхода*.

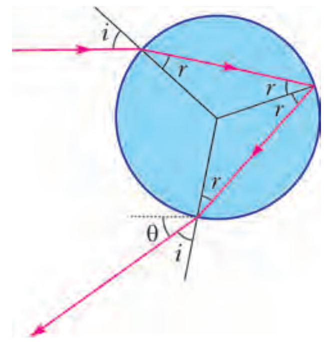


Рис. 6. Два преломления и одно отражение, θ – угол выхода луча

В этих обозначениях закон преломления на входе в каплю записывается в виде

$$\sin i = \frac{4}{3} \sin r ,$$

а на выходе имеем

$$\frac{4}{3} \sin r = \sin i ,$$

что по сути одно и то же. И еще, в точке отражения на рисунке 6 учтено, что угол падения равен углу отражения.

Вот несколько фактов, полезных при расчете траектории светового луча.

Упражнение 3

1) Убедитесь, что из закона преломления для капли следует

$$r = \arcsin\left(\frac{3}{4} \sin i\right).$$

2) Используя рисунок 6, докажите следующую формулу для угла выхода θ:

$$\theta = 4r - 2i .$$

«Взялся за перо и вычислил». Используя закон преломления, Декарт рассчитал ход 27 световых лучей, и этого ему оказалось достаточно, чтобы понять, почему капля излучает в направлении к солнцу конус с углом полураствора $42°$. Посмотрим, что именно вычислял Декарт и как он интерпретировал свои вычисления.

Будем считать, что капля единичного радиуса освещается пучком параллельных солнечных лучей, где есть центральный луч, который направлен в центр капли. Для любого луча расстояние от него до центрального обозначим h и назовем *высотой входа* в каплю.

Упражнение 4. Проверьте, что для капли единичного радиуса высота входа луча h и угол его падения i связаны соотношением $h = \sin i$.

Для заданной высоты входа h Декарт вычислял угол выхода θ. Сначала он провел вычисления для высот от 0,1 до 1 с шагом 0,1. После этого для высот от 0,81 до 0,98 он проделал те же вычисления с уменьшенным шагом 0,01. Таким образом, Декарт установил, что максимальный угол выхода θ достигается у луча с высотой $h = 0{,}86$ и этот угол как раз составляет $42°$.

Посмотрим, как Декарт геометрически интерпретировал этот результат. Компьютер позволяет не экономить на вычислениях, так что запустим сразу 101 луч и поглядим, что с ними происходит при выходе из капли. Сделаем это в два приема. Сначала на каплю единичного радиуса запустим 87 параллельных лучей, при этом начальный луч проходит через центр капли, а последний входит в нее на высоте 0,86. На рисунке 7 входящие лучи слились в короткую горизонтальную полоску. Внутри капли каждый луч один раз отражается, как на рисунке 4. Это здесь не нарисовано, а вот все выходящие лучи изображены. Мы видим, что когда высота входа луча растет от 0 до 0,86, угол выхода луча θ возрастает от $0°$ до $42°$. При этом сначала угол выхода растет равномерно, потом

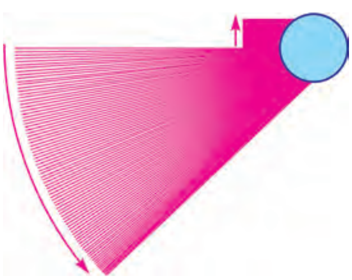


Рис. 7. По мере роста высоты входа лучей от 0 до 0,86 угол выхода увеличивается от 0° до 42°

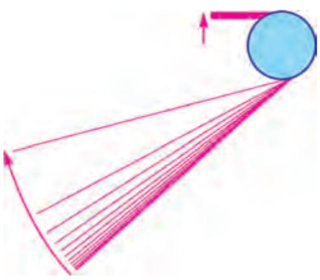


Рис. 8. Высота входа лучей растет от 0,86 до 1, а угол выхода уменьшается от 42° до 14°

угол между соседними лучами начинается уменьшаться и при приближении к $42°$ становится нулевым – выходящий луч останавливается. Останавливается и начинает двигаться в обратном направлении, что видно на рисунке 8, где высота входа лучей увеличивается от 0,86 до 1, а угол выхода уменьшается в три раза, от $42°$ до $14°$. В любой случае вблизи крайнего луча, идущего под максимальным углом $42°$, наблюдается высокая концентрация выходящих из капли световых лучей.

Уберем входящие лучи на рисунках 7 и 8, после этого наложим рисунки друг на друга. Получим все лучи, выходящие из нижней половины капли, а затем дополним их еще лучами, выходящими из верхней половины (рис.9). И теперь можно сказать, что концентрация лучей, выходящих из капли, мала вблизи центрального луча и чрезвычайно высока на границах пучка. Эти границы почти прямолинейны и практически совпадают с крайними лучами, наклоненными под максимальным углом в $42°$.

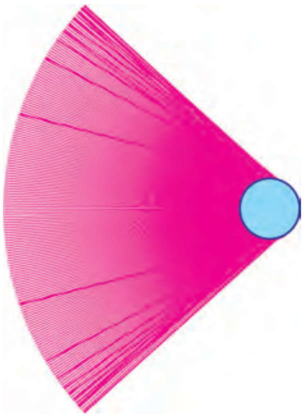


Рис. 9. Все лучи, выходящие из капли после одного внутреннего отражения

Чтобы получить пространственное распределение лучей, необходимо провернуть весь рисунок 8 вокруг центрального луча. И мы увидим, что экспериментальное представление о капле, излучающей конус в направлении солнца, зафиксированное на рисунке 1, нуждается в уточнении. На самом деле, внутренность конуса целиком заполнена выходящими из капли лучами. На поверхности конуса с полураствором $42°$ наблюдается лишь повышенная концентрация световых лучей. Это существенное уточнение реальной картины взаимодействия солнечных лучей с каплей дождя. Тем не менее, глаз наблюдателя регистрирует именно эту повышенную концентрацию световых лучей. Поэтому предложенный ранее механизм образования радуги безусловно остается в силе.

Вычисления Декарта, которые мы обсудили, и его интерпретация этих вычислений составляют основу теории радуги.

Упражнение 5. Используя упражнения 3 и 4, покажите, что для капли единичного радиуса

$$\theta(h) = 4\arcsin\frac{3}{4}h - 2\arcsin h.$$

Постройте график этой функции. Докажите, что ее максимум достигается при $h = 2\sqrt{15}/9$, а максимальное значение этой функции равно $42°2'$.

Как она выглядит на самом деле? Пора взглянуть на настоящую радугу. В отличие от радуги

Рис. 10. Настоящая природная радуга

Декарта, она широкая и цветная (рис.10), но это мы обсудим чуть позже. А пока обратим внимание на тени от деревьев. На земле они параллельны и так же, как параллельные рельсы, сходятся в одной точке – благодаря перспективе. Эта точка расположена на горизонте под самой вершиной радуги. И если для каждого дерева провести луч от его вершины к вершине тени, то все эти лучи сойдутся в самом центре радуги.

А теперь представьте себе, что вы находитесь внутри этой картины. Посмотрите сначала на тень своей головы, а потом на любую точку радуги. Угол между этими двумя направлениями как раз составит $42°$, вычисленные Декартом. Посмотрите еще на верхние уголки рисунка 10 – может, вы разглядите там неяркие цветные полосы. Если нет, взгляните на рисунок 11.

Рис. 11. Двойная радуга

И тут нужно сказать, что почти всегда вместе с первой, основной дугой, которую мы обсуждали и которая видна под углом $42°$, появляется менее яркая, внешняя *вторая дуга*, видная под углом $51°$. На рисунке 11 также заметна темная полоса, расположенная между дугами. Она называется *темным пространством Александра*, по имени описавшего ее греческого философа-перипатетика Александра Афродисийского.

Вторая дуга. Вторая дуга идеально вписывается в теорию Декарта. Уже в процессе эксперимента с колбой Декарт отмечает наличие второго, менее яркого конуса с углом полураствора $51°$, излучаемого каплей в направлении к солнцу. Иными словами, рисунок 1 на самом деле нужно заменить рисунком 12 с двумя конусами. Если теперь вернуться к рисунку 2 и поменять там угол $42°$ на угол $51°$, то становится ясно, откуда берется вторая дуга. Опять же экспериментально Декарт установил, что за образование второй дуги отвечают лучи, дважды отразившиеся внутри капли (рис.13). Декарт рассчитал траекторию таких лучей. Он выяснил, что выходящие из капли лучи заполняют внешнюю часть конуса с углом полураствора $51°$, при этом на поверхности конуса наблюдается повышенная концентрация световых лучей (рис.14). Так что после некоторой корректировки рисунок 12 остается в силе. Остается в силе и объяснение второй дуги, основанное на рассмотрении рисунка 2, только опять же там угол $42°$ нужно поменять на угол $51°$.

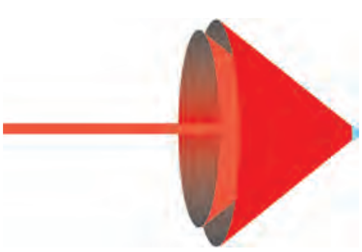


Рис. 12. В направлении к солнцу капля излучает два конуса: один с углом полураствора $42°$, другой с углом $51°$

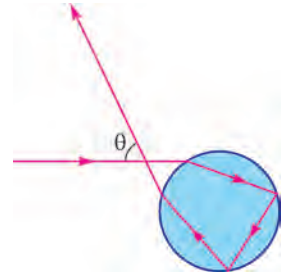


Рис. 13. Лучи, дважды отражающиеся внутри капли, отвечают за образование второй дуги, θ – угол выхода

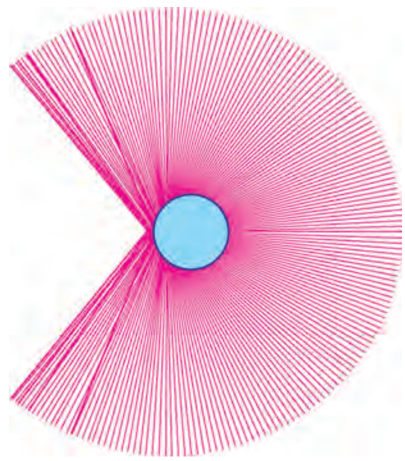


Рис. 14. Все лучи, выходящие из капли после двух внутренних отражений

Упражнение 6. Докажите, что для дважды отраженных внутри капли единичного радиуса световых лучей (см. рис.13) зависимость угла выхода θ от высоты входа h имеет вид

$$\theta(h) = 2\arcsin h - 6\arcsin\frac{3}{4}h + \pi .$$

Постройте график этой функции. Докажите, что ее минимум достигается при $h = \sqrt{130}/12$, а само минимальное значение в градусах равно $50°59'$.

Пространство Александра. Теперь наложим друг на друга рисунки 9 и 13. Рисунок 15 показывает, что на большом удалении от капли первая дуга лежит внутри второй. Их разделяет пространство, куда не попадает ни один из лучей, однократно или двукратно отраженных внутри капли. С точки зрения наблюдателя, это означает, в его глаз не будут попадать лучи от капель, расположенных между первой дугой и второй. Именно за счет этого пространство между дугами

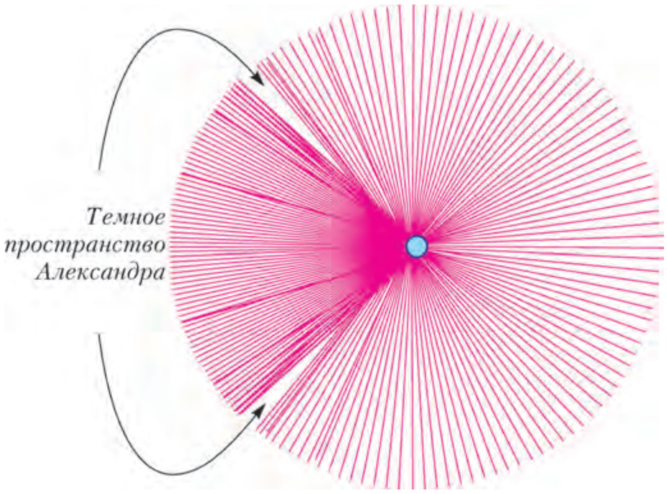


Рис. 15. Два конуса и пространство Александра

выглядит более темным (еще раз посмотрите на рисунок 11).

Упражнение 7. Оцените угловую ширину темного пространства Александра в градусах.

Сделаем небольшое дополнение. Судя по рисунку 9, вершина конуса с углом полураствора 42° лежит вблизи задней поверхности капли. А рисунок 14 показывает, что вершина конуса с углом полураствора 51° находится вблизи передней поверхности капли. Это приводит к тому, что вблизи капли больший конус расположен внутри меньшего конуса, что также подтверждается рисунком 15.

Эксперимент с колбой. Мы почти что закончили с теорией Декарта. Попытаемся еще воспроизвести его эксперимент. «Каплей» послужит круглодонная колба объемом 250 мл. На компьютере нарисован белый круг на черном фоне – изображение солнца, и это изображение запускается через проектор. Для наблюдения радуги в качестве экрана использовался лист ватмана с круговым отверстием посередине. На рисунке 16 видны колба и экран, а проектор, вместе с компьютером, находится за экраном и через отверстие освещает колбу.

Колба – это, конечно, не сферический сосуд, у нее есть горло, так что водой была заполнена только ее сферическая часть. Поэтому круговые дуги на рисунке 16 видны лишь частично, при этом нижняя и верхняя части изображения на экране формируются горизонтальной поверхностью воды в колбе.

Где здесь первая дуга, а где вторая? Вот признаки, по которым мы можем их отличить. Вторая – менее яркая, за счет того что формирующие ее лучи испытывают внутри капли дополнительное отражение. Кроме того, в первой дуге цвета изнутри снаружи идут от фиолетового к красному, а во второй – в обратном порядке. Судя по этим признакам, внутри находится вторая дуга. И это соответствует теории Декарта, с помощью которой был построен рисунок 15. Дуги обращены друг к другу фиолетовыми сторонами, и пространство между ними заполнено фиолетовым цветом. Это пространство, расположенное вблизи капли, по аналогии можно назвать *фиолетовым пространством Александра*.

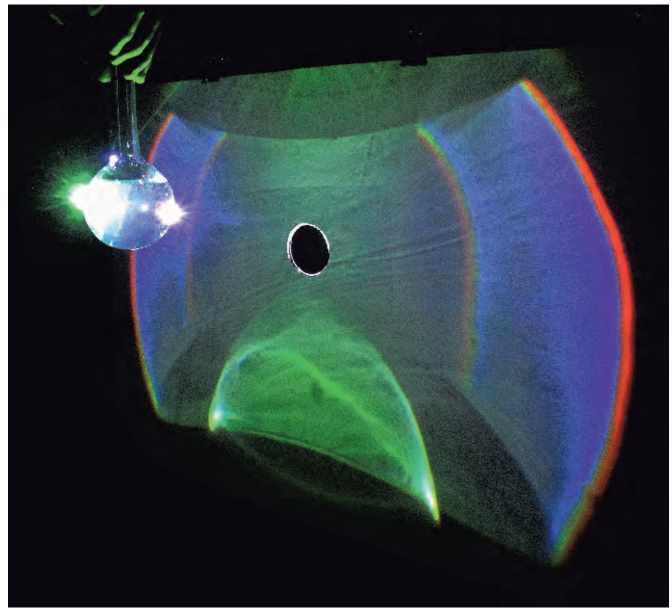


Рис. 16. Эксперимент с колбой, вторая дуга внутри первой

Судя по рисунку 15, стандартное взаимное расположение дуг, когда первая лежит внутри второй, восстанавливается, если расстояние от капли до экрана будет больше десяти радиусов капли. И, конечно, при наблюдении обычной природной радуги расстояние от капель дождя до глаза наблюдателя многократно превышает этот предел.

(Окончание следует)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2016» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2421» или «Ф2428». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2421, М2422а, М2426, М2427, М2428а,б предлагались на XXXVII Турнире городов, задача М2423 предлагалась на V Европейской математической олимпиаде для девушек, задача Ф2432 – на Московской физической олимпиаде 2016 года.

Задачи М2421–М2428, Ф2428–Ф2434

М2421. Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и находит приближенную сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он выбирает из списка любые два числа, складывает их, отбрасывает у суммы знаки после запятой (если они есть) и записывает результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он делает то же самое и так далее, пока в списке не останется одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме?

М.Евдокимов

М2422. Прямоугольник $p \times q$, где p, q – натуральные взаимно простые числа, $p < q$, разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла прямоугольника в его правый верхний угол проведена диагональ. Она отсекает треугольники от некоторых квадратиков. Найдите: а) суммарный периметр; б) суммарную площадь всех этих треугольников.

А.Толпыго

М2423. Окружности ω_1 и ω_2 одинакового радиуса пересекаются в точках X_1 и X_2 (рис. 1). Окружность ω касается окружности ω_1 внешним образом в точке T_1 и окружности ω_2 внутренним образом в точке T_2. Докажите, что прямые X_1T_1 и X_2T_2 пересекаются на окружности ω.

Ч.Лейтем (Люксембург)

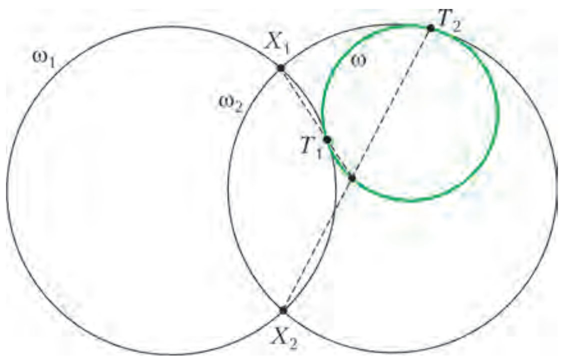


Рис. 1

М2424. На плоскости дано несколько прямых, имеющих общую точку O. Докажите, что каждую из этих прямых можно раскрасить красным или синим так, чтобы на плоскости нашлась точка, отличная от O, сумма расстояний от которой до всех красных прямых была равна сумме расстояний от нее до всех синих прямых.

И.Вайнштейн

М2425. Прямоугольный параллелепипед $2 \times 2 \times 100$ нужно разбить на кирпичи $1 \times 1 \times 2$. Докажите, что количество способов сделать это является точным квадратом. (При подсчете параллелипипед не вращаем и не переворачиваем.)

В.Расторгуев

М2426. В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос, есть ли дорога между ними. Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.

К.Кноп

М2427. На доске написано N чисел, все они различны, и одно из них равно 0. Можно взять любой многочлен, каждый коэффициент которого равен одному из написанных чисел (среди коэффициентов могут быть равные), и дописать на доску все корни этого многочлена. За несколько таких операций на доске оказались все целые числа от −2016 до 2016 (и, возможно, еще какие-то числа). Найдите наименьшее возможное значение N.

Г.Жуков

М2428. На сферической планете с длиной экватора 1 планируют проложить N кольцевых дорог, каждая из которых будет идти по окружности длины 1. Затем по каждой дороге запустят несколько поездов. Все поезда будут ездить по дорогам с одной и той же положительной постоянной скоростью, никогда не останавливаясь и не сталкиваясь. (Поезда считайте дугами нулевой толщины, из которых выброшены концевые точки.) Какова в таких условиях максимально возможная суммарная длина всех поездов: а) при $N = 3$; б) при $N = 4$? в*) Может ли при некотором N суммарная длина поездов быть больше 1000?

А.Бердников

Ф2428. Группа из трех туристов должна перебраться из пункта A в пункт B по дороге длиной $s = 45$ км. Стартуют все одновременно. На всю группу туристов есть только два велосипеда, причем если на велосипеде едут двое, то их скорость равна $3v$, а если на велосипеде едет один человек, то его скорость равна $4v$. Если же турист идет пешком, то его скорость равна $v = 5$ км/ч. За какое минимальное время все туристы могут оказаться в пункте назначения?

В.Сергеев

Ф2429. Ковбой привязал мячик для бейсбола, $m_м = 150$ г и $D = 7{,}3$ см, к суровой (нерастяжимой и легкой) нитке длиной $L = 1$ м, которая другим концом была закреплена на круглой горизонтальной перекладине диаметром $d = 6$ см. Затем он отошел на 10 шагов в направлении, перпендикулярном перекладине, и выстрелил из кольта по мячу. Мяч стал быстро двигаться, накручивая нитку на перекладину, а потом оторвался. При осмотре оказалось, что пуля застряла в мяче, а нитка обернулась вокруг перекладины $n = 2$ раза. Оцените, какой была скорость пули перед столкновением с мячом, если масса пули $m_п = 10$ г, а нитка выдерживает груз массой не больше $m_{гр} = 10$ кг.

Д.Бограчев

Ф2430. Вася решил взвесить с помощью железных гирь найденный им недалеко от озера Чебаркуль небольшой кусок челябинского метеорита. Для этого он использовал симметричные равноплечные весы, сделанные из железа. В воздухе взвешивание дало результат $M = 2{,}1$ кг. Когда весы были полностью погружены в воду озера, результат был другим – для уравновешивания весов потребовалось положить на них гири, суммарная масса которых оказалась равной $m = 1{,}8$ кг. При этом и взвешиваемое вещество, и гири также были полностью погружены в воду. Чему равна плотность материала метеорита? Плотность железа $\rho_ж = 7{,}9$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3.

В.Статиков

Ф2431. Три конденсатора с электрическими емкостями C, $2C$ и $3C$ соединены в замкнутую цепочку последовательно друг за другом. С помощью специального прибора, подключенного к трем местам соединений конденсаторов, этим самым местам были сообщены (переданы) электрические заряды $+Q$, $+Q$ и $-2Q$. Прибор отключили. Какая максимальная (минимальная) энергия может быть запасена в системе заряженных конденсаторов?

С.Варламов

Ф2432. Бесконечная сетка с ромбовидными ячейками, показанная на рисунке 2, состоит из одинаковых рези-

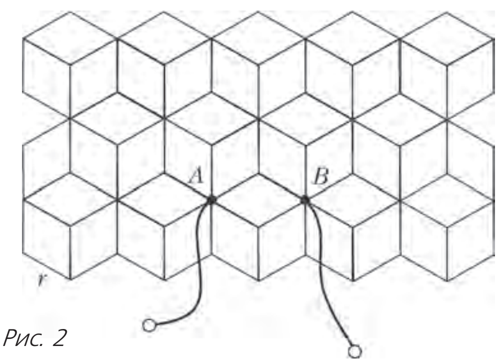


Рис. 2

сторов сопротивлением r. Найдите сопротивление между точками A и B.

А.Бычков

Ф2433. В электрической схеме, изображенной на рисунке 3, все элементы идеальные, ток в катушке индуктивностью L равен нулю. Ключ замыкают, а размыкают его через промежуток времени t_0, когда скорость изменения энергии, запасаемой в катушке индуктивности, достигает максимума. Известно, что $t_0 = 2\ln 2 \cdot (L/R)$. Найдите:

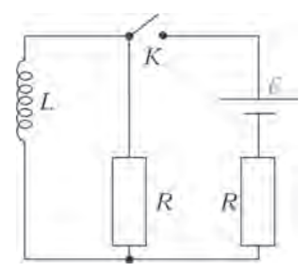


Рис. 3

1) мощность P, которую развивал источник тока в момент размыкания ключа;
2) количество теплоты Q_1, которое выделилось в схеме после размыкания ключа;
3) количество теплоты Q_2, которое выделилось в схеме при замкнутом ключе.

А.Шеронов

Ф2434. Над плоской горизонтальной поверхностью на высоте $H = 10$ м находится точечный изотропный источник света интенсивностью $W_0 = 1000$ К. (тысяча кандел). В ближайшей к источнику света точке поверхности установлен маленький плоский датчик освещенности, его плоскость перпендикулярна лучам света. Площадь чувствительного элемента датчика $S = 0{,}1$ см^2. Какую освещенность E_1 (в люксах) регистрирует датчик? Затем прямо под источником света на поверхность поставили вертикальную цилиндрическую трубу с внутренним диаметром $d = 10$ см. Высота трубы равна H. Источник света и датчик освещенности находятся на оси симметрии трубы. Внутренние стенки трубы гладкие, зеркальные и отражают 100% света. Какую теперь освещенность E_2 регистрирует датчик? Что покажет датчик, если стенки при любом угле падения света отражают 99% падающего света? (Численные расчеты можно провести с помощью компьютера.)

М.Светлов

Решения задач М2405–М2413, Ф2413–Ф2419

М2405. *Прямая, соединяющая центры описанной и вписанной окружностей треугольника, пересекает одну из его сторон в основании высоты, а другую – в точке ее касания с соответствующей вневписанной окружностью. Найдите угол между этими сторонами треугольника.*

Решение см. в статье А.Заславского «О двух классах треугольников, или Откуда берутся задачи» в этом номере журнала.

М2406. *Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если:*
а) k = 9; б) k = 8?

а) **Ответ.** Необязательно.
Удалим числа 1, 2, …, 9. Тогда сумма даже девяти наименьших из оставшихся чисел (10 + 11 + … + 18 = = 126) больше 100.
б) **Ответ.** Обязательно.
Рассмотрим 12 пар чисел, дающих в сумме 25: (1, 24), (2, 23), …, (12, 13). После удаления 8 чисел останется не меньше четырех нетронутых пар. Они и дадут в сумме 100.

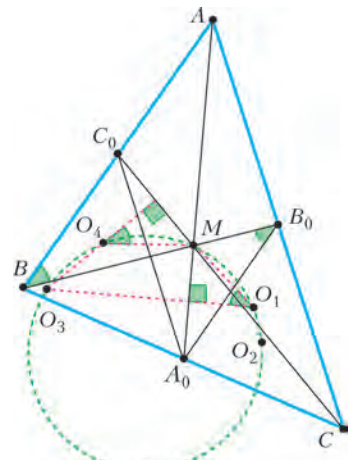
А.Шаповалов

М2407. *Все коэффициенты некоторого многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше чем 1/2016.*

Решение см. в статье С.Дориченко, П.Кожевникова «От подстановки корня до трансцедентного числа» в этом номере журнала.

М2408. *В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 и точка M лежат на одной окружности.*

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 соответственно. Проведем рассуждения для расположения точек, показанного на рисунке (для других случаев расположения центров рассуждения аналогичны; чтобы избежать разбора случаев, можно считать все углы ориентированными).



Докажем, что O_4 лежит на окружности (MO_1O_3). Прямая O_1O_3 – серединный перпендикуляр к MA_0. Угол MO_1O_3 равен половине центрального угла MO_1A_0 окружности (MA_0B_0), т.е. вписанному в нее углу MB_0A_0. Прямая O_4O_3 – серединный перпендикуляр к отрезку MC_0, поэтому угол между прямыми MO_4 и MO_3 равен половине центрального угла MO_4C_0 окружности (MBC_0), т.е. вписанному в нее углу MBC_0. А углы MB_0A_0 и MBC_0 равны из параллельности B_0A_0 и BC_0. Поэтому $\angle MO_1O_3 + \angle MO_4O_3 = 180°$, т.е. O_4 лежит на окружности (MO_1O_3). Аналогично, O_2 лежит на окружности (MO_1O_3).

П.Кожевников

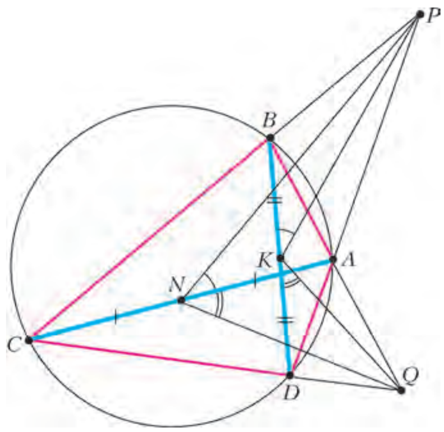
М2409. *Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки – одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?*

Ответ. Вася.
Заметим, что перед Васиным ходом всегда будет оставаться *нечетное* число спичек. Понятно, что выиграет тот, кому достанется позиция, когда квадратиков один или два смежных (по стороне). Поэтому Васе достаточно не оставлять после себя такой позиции, и тогда он выиграет, поскольку ничья невозможна. Покажем, как он может делать это в разных случаях.
1) Осталось больше трех квадратиков. Он возьмет крайнюю спичку, испортив не более одного квадратика.
2) Осталось три квадратика. Он возьмет спичку не из них, а если таких спичек нет, то из-за нечетности числа спичек ясно, что два квадратика смежны, а третий несмежен с ними, тогда он испортит один из смежных квадратиков.
3) Осталось два квадратика и они несмежны. Из-за нечетности есть спичка, в них не входящая, которую и возьмет Вася.
Все позиции рассмотрены.

А.Шаповалов

М2410. *Дан вписанный четырехугольник ABCD. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180°.*

Пусть точки расположены так, как на рисунке. Треугольники *ACP* и *BDP* подобны, поскольку у них углы *C* и *D* опираются на одну дугу, а угол *P* общий. Поэтому соответственные медианы в них отсекают



подобные треугольники ANP и BKP. Следовательно, углы ANP и BKP равны. Аналогично, подобие треугольников ACQ и DBQ влечет равенство углов ANQ и DKQ. Следовательно,

$$\angle PKQ + \angle PNQ =$$
$$= \angle PKQ + \angle BKP + \angle DKQ = \angle BKD = 180^\circ .$$

Л.Медников, А.Семенов, А.Шаповалов

M2411. *Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «+», «−», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «+», либо «−» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны:*

а) числа 1, 2, 4;

б) любые 100 различных действительных чисел?

Ответ. Возможно (в общем случае б).

Пусть имеется некоторое выражение T. Покажем, как «надстроить» имеющееся выражение, чтобы к множеству его значений добавилось заданное число a. Для этого подойдет выражение $a + (0,5 \pm 0,5)(T - a)$ (при выборе знака «+» получаются значения выражения T, а при выборе знака «−» получается значение a). Так можно, стартуя с некоторого числа, выполнять последовательно «надстройки» и за 99 шагов добиться того, чтобы множество значений выражения совпало с заданным множеством из 100 действительных чисел.

Ко Бон Гюн

M2412. *Нетрудно проверить, что объем правильного октаэдра, описанного около сферы радиуса 1, равен $4\sqrt{3}$. Выясните, верно ли следующее утверждение: «объем любого восьмигранника, описанного около сферы радиуса 1, не меньше $4\sqrt{3}$».*

Ответ: неверно.

Приведем пример. Правильный октаэдр составлен из двух пирамид (на рисунке 1 это пирамиды $EABCD$ и E_1ABCD). Если повернуть верхнюю пирамиду относительно ее высоты на 45°, получится многогранник, изображенный на рисунке 2. При этом боковые грани будут по-прежнему касаться сферы, вписанной в исходный октаэдр.

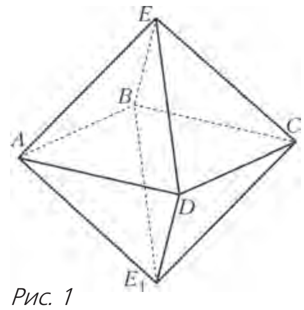


Рис. 1

Теперь продолжим грани верхней пирамиды вниз, а нижней – вверх, отрезая тем самым от этого многогранника восемь маленьких пирамид с вершинами A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1. Тогда в пересечении восьми полупространств, ограниченных плоскостями EAB, EBC, ECD, EDA, $E_1A_1B_1$, $E_1B_1C_1$, $E_1C_1D_1$, $E_1D_1A_1$, получим восьмигранник (рис.3) – это и есть нужный пример.

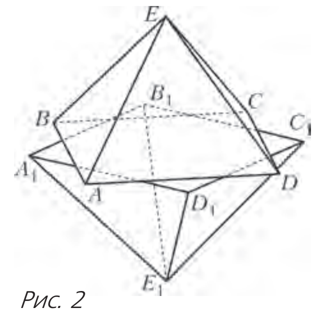


Рис. 2

Замечания. Объем полученного многогранника примерно на 2,94% меньше объема исходного правильного октаэдра. Оказывается, этот объем можно еще уменьшить примерно на 0,07%: среди всех описанных около сферы радиуса 1 восьмигранников минимум объема достигается на некотором многограннике с четырьмя пятиугольными и четырьмя четырехугольными гранями. Интересно выяснить, является ли построенный нами многогранник минимальным по объему хотя бы среди всех описанных восьмигранников того же комбинаторного типа (т.е. имеющих 8 четырехугольных граней с таким же принципом склейки).

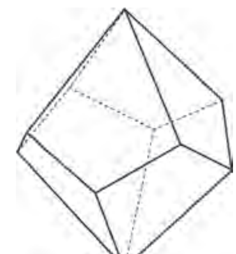


Рис. 3

А.Меркулова

M2413*. *Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Ее разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N-1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.*

Выберем любое число h, и всех ребят ростом меньше h назовем *карликами*, а остальных – *великанами*. Место между соседями, левый из которых карлик, а правый – великан, назовем *стыком*. *Весом* стыка назовем количество карликов слева и великанов справа от него (не обязательно подряд). Вес может принимать значения от 2 до N. До операции всякий стык мог быть только внутри группы, причем не более одного в группе. А после операции – только на границе бывшей группы, которая содержала стык. Веса обоих возможных стыков на границах группы будут меньше веса бывшего стыка этой группы. Поэтому максимум весов уменьшается при операции (если, конечно, стыки еще появляются). Значит, после $N-1$ операции стыков не останется. Тем самым, все великаны будут стоять левее всех карликов.

Рассматривая нужные h, получим, что первый будет выше всех, первые двое – выше всех остальных и т.д. Таким образом, ребята выстроятся по убыванию.

Л.Медников, А.Семенов, А.Шаповалов

Ф2413. *В Новогоднюю ночь в безветренную погоду с аэродрома Санкт-Петербурга (60° северной широты) стартует самолет и летит на постоянной высоте $h = 5$ км с постоянной по величине скоростью $v = 1000$ км/ч, держа все время курс на северо-восток (по звездам). С каким ускорением относительно Земли (система Птолемея) движется самолет ровно через $T = 4$ ч полета? Землю можно считать шаром радиусом $R = 6400$ км.*

За четыре часа полета самолет пролетел $s = vT = 4000$ км и сместился вдоль поверхности Земли в направлении на север на расстояние $s_с = \left(v/\sqrt{2}\right)T = 2828$ км. Это соответствует новой широте

$$\varphi = 60° + \frac{180°}{\pi}\frac{2828}{6400} \approx 85{,}32°$$

(северной широты). Расстояние от самолета до северного полюса в этот момент равно

$$l = R\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\varphi}{180°}\right) = 522{,}6 \text{ км} .$$

За $\Delta t = 1$ с самолет смещается в направлении на восток на расстояние $s_в = \left(v/\sqrt{2}\right)\Delta t = 0{,}196$ км. Следовательно, за это время скорость самолета повернется на угол

$$\alpha = \frac{s_в}{l} = \frac{0{,}196 \text{ км}}{522{,}6 \text{ км}} = 3{,}76\cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Это означает, что ускорение самолета в указанный момент времени равно

$$a = \frac{\alpha v}{\Delta t} \approx 0{,}1 \text{ м/с}^2 .$$

Высота полета h много меньше радиуса Земли R, поэтому от нее ответ не зависит.

В.Чкалов

Ф2414. *Маленький брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии L_0 от вертикального столба, на котором на высоте h закреплен маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Невесомая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой $F > mg$. Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость v_0, направленную от столба. Каким будет расстояние от столба до бруска в тот момент, когда брусок на мгновение остановится? Какой будет скорость бруска в тот момент, когда брусок перестанет давить на поверхность?*

Из условия задачи ясно, что в начальный момент брусок давит на горизонтальную поверхность, поэтому «оторваться» от поверхности он сможет только на обратном пути к столбу, когда расстояние L_2 станет меньше L_0. Кинетическая энергия бруска изменяется, так как сила F совершает работу. Работа силы, с учетом знака, равна произведению величины силы на изменение (укорочение) длины участка нити между бруском и блоком.

Для ответа на первый вопрос задачи нужно решить уравнение

$$\frac{mv_0^2}{2} + F\left(\sqrt{h^2 + L_0^2} - \sqrt{h^2 + L_1^2}\right) = 0 ,$$

откуда находим искомое расстояние от столба до бруска:

$$L_1 = \sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{2F} + \sqrt{h^2 + L_0^2}\right)^2 - h^2} .$$

Когда расстояние L_2 станет меньше L_0, скорость бруска v_2 найдем из соотношения

$$\frac{mv_0^2}{2} + F\left(\sqrt{h^2 + L_0^2} - \sqrt{h^2 + L_2^2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} .$$

Так как в момент отрыва брусок перестает давить на поверхность, то выполняется условие

$$F\frac{h}{\sqrt{h^2 + L_2^2}} = mg .$$

Отсюда можно получить ответ на второй вопрос задачи, т.е. найти скорость бруска в момент отрыва от поверхности:

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}\left(\sqrt{h^2 + L_0^2} - \frac{Fh}{mg}\right)}.$$

А.Старов

Ф2415. *Длинный, $L = 1$ м, прямоугольный брусок квадратного сечения $a\times a = 10\times 10$ см имеет плотность $\rho = 500$ кг/м³. Брусок опустили в воду озера и удерживали его в таком неустойчивом положении равновесия, что одна из длинных граней бруска была сухой и горизонтальной, при этом половина объема бруска была погружена в воду. Брусок отпустили, и он занял устойчивое положение, повернувшись вокруг оси симметрии на угол $\alpha = 45°$. На сколько уменьшилась потенциальная энергия системы «вода–брусок»?*

Центр масс бруска свое положение не изменил. Объем вытесненной бруском воды, равный $V/2 = a^2L/2$, остался после поворота прежним, однако положение центра масс вытесненной воды изменилось. Изменение потенциальной энергии системы можно вычислить как результат такой, проведенной мысленно, процедуры: 1) сначала с поверхности озера снимается тонкий слой воды объемом $V/2$ и заливается в объем, занимаемый нижней половиной бруска в начальном положении, 2) затем то же самое количество воды достается из выемки такого же объема $V/2$, но занимающей новое положение, и распределяется вновь тонким слоем по поверхности озера. Плотность воды вдвое больше плотности материала бруска. На первом этапе силами тяжести совершается положительная работа

$$A_1 = 2\rho\frac{V}{2}g\frac{a}{4} = \frac{a\rho Vg}{4} ,$$

а на втором этапе – отрицательная работа

$$A_2 = -2\rho\frac{V}{2}g\frac{a\sqrt{2}}{6} = -\frac{a\sqrt{2}\rho Vg}{6}.$$

В результате суммарная работа сил тяжести оказалась положительной, т.е. потенциальная энергия системы уменьшилась на величину

$$\Delta E_п = A_1 + A_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)a\rho Vg =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)a^3 L\rho g = 71{,}5\cdot 10^{-3}\ Дж.$$

С.Дмитриев

Ф2416. *Вася выдувает через длинную трубку мыльный пузырь. Надув пузырь, он выпускает трубку изо рта, при этом воздух из пузыря выходит через трубку наружу. Окончательно пузырь исчезает, так и не лопнув, через время τ. За какое время сдуется надутый таким же образом мыльный пузырь вдвое большего радиуса? Считайте, что воздух по трубке движется достаточно медленно, а свойства мыльной пленки у обоих пузырей одинаковы.*

Поверхностное натяжение мыльной пленки создает внутри пузыря добавочное давление (давление Лапласа) $p_{доб} = \frac{2\sigma}{R}$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки, а R – радиус пузыря. Это добавочное давление для пузырей «разумных» размеров (радиус которых значительно больше размеров молекул воды и мыла) существенно меньше внешнего атмосферного давления. При медленном течении воздуха в трубке силы трения воздуха о стенки трубки пропорциональны величине средней скорости движения воздуха в трубке. Следовательно, средняя скорость пропорциональна избыточному давлению в пузыре, т.е. обратно пропорциональна радиусу пузыря:

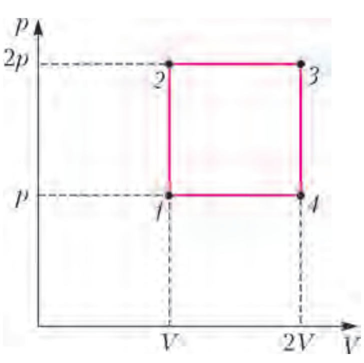
$$v_{ср} \sim \frac{1}{R}.$$

Объем пузыря убывает со скоростью, пропорциональной скорости движения воздуха в трубке:

$$\frac{d\left(R^3\right)}{dt} \sim v_{ср} \sim \frac{1}{R}.$$

Из этого дифференциального соотношения следует, что время «сдувания» пузыря пропорционально R^4. Таким образом, пузырь вдвое большего радиуса сдуется за время, равное 16τ.

В.Пузырев



Ф2417. *Газ фотонов, для которого внутренняя энергия U пропорциональна объему V и абсолютной температуре T в четвертой степени: $U = \alpha VT^4$, а давление газа p равно одной третьей отношения внутренней энергии к объему: $p = \alpha T^4/3$, участвует в процессе, изображенном на рисунке. Каков КПД этого процесса? Каков максимально возможный КПД теплового двигателя при температурах нагревателя и холодильника, равных максимальной и минимальной температурам в рассматриваемом процессе?*

Работа, совершенная за цикл, равна

$$A = (2p - p)(2V - V) = pV.$$

Газ фотонов получает тепло на участках *1–2* и *2–3* и отдает тепло на участках *3–4* и *4–1*. Полученное количество теплоты равно

$$Q_{пол} = 2pV + (U_3 - U_1) = 2pV + \alpha\left(2VT_2^4 - VT_1^4\right) = 11pV.$$

Коэффициент полезного действия процесса, следовательно, равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{пол}} = \frac{1}{11} = 9{,}09\%.$$

Температура газа максимальна в точке *3*, а минимальна в точке *1*. Отношение этих температур равно

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \sqrt[4]{\frac{p_3}{p_1}} = \sqrt[4]{2}.$$

КПД цикла Карно, т.е. максимально возможный КПД теплового двигателя при заданных температурах нагревателя и холодильника, равен

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0{,}1591 = 15{,}91\%.$$

А.Газов

Ф2418. *Два одинаковых проводящих шара 1 и 2 с диаметрами d = 10 см каждый установлены на непроводящих подставках в воздухе так, что расстояние между их центрами L = 1 м. Сначала шары подключили к высоковольтному источнику и зарядили максимально возможными одинаковыми зарядами Q. Затем отключили шары от источника и длинным тонким проводом стали по очереди заземлять шары и отключать от заземления. После первого заземления шара 1 на нем был заряд q_1, после заземления шара 2 на нем был заряд q_2 и так далее. Иными словами, нечетные заземления проводились для шара 1, а четные – для шара 2. Найдите Q, $q_1, q_2, q_3, \ldots$ вплоть до максимального номера операции заземления, когда еще получается «разумный» ответ. «Пробивная» напряженность электрического поля в воздухе $E_0 = 3\cdot 10^6$ В/м.*

Сначала нужно найти максимальные заряды шаров Q. Если учесть перераспределение зарядов на шаре, вызванное наличием соседнего шара, то понятно, что максимальное по напряженности электрическое поле будет создаваться шарами в точках их поверхностей, находящихся на максимальном расстоянии друг от друга. Расстояние L = 1 м значительно больше D = 10 см, поэтому при вычислениях можно пользоваться малостью величины D/L и считать, что каждый шар находится в почти однородном поле, созданном другим шаром. Внешнее поле равно $E_{внеш} = kQ/L^2$. Перераспределение зарядов на шаре создает поле, компенсирующее внешнее поле таким образом, что внутри шара

Число n	0	1	2	3	4	5
Заряд шара 1, Кл	$0{,}83 \cdot 10^{-6}$	$-4{,}15 \cdot 10^{-8}$	$-4{,}15 \cdot 10^{-8}$	$-1{,}03 \cdot 10^{-10}$	$-1{,}03 \cdot 10^{-10}$	$-2{,}6 \cdot 10^{-13}$
Заряд шара 2, Кл	$0{,}83 \cdot 10^{-6}$	$0{,}83 \cdot 10^{-6}$	$2{,}1 \cdot 10^{-9}$	$2{,}1 \cdot 10^{-9}$	$5{,}2 \cdot 10^{-12}$	$5{,}2 \cdot 10^{-12}$
Число n	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Заряд шара 1, Кл	$-2{,}6 \cdot 10^{-13}$	$-6{,}5 \cdot 10^{-16}$	$-6{,}5 \cdot 10^{-16}$	$-1{,}6 \cdot 10^{-18}$	$-1{,}6 \cdot 10^{-18}$	$-0{,}4 \cdot 10^{-20}$
Заряд шара 2, Кл	$1{,}3 \cdot 10^{-14}$	$1{,}3 \cdot 10^{-14}$	$3{,}24 \cdot 10^{-17}$	$3{,}24 \cdot 10^{-17}$	$0{,}81 \cdot 10^{-19}$	$0{,}81 \cdot 10^{-19}$

напряженность электрического поля равна нулю. Собственное поля шара, созданное его зарядом на поверхности, равно $E_{\text{собст}} = 4kQ/D^2$. Отношение величин этих полей имеет порядок $E_{\text{собст}}/E_{\text{внеш}} \approx 4L^2/D^2 = 400$. Значит, действительно можно при расчете Q перераспределение зарядов не учитывать. Тогда первоначальные заряды шаров будут равны

$$Q = \frac{E_0 D^2}{4k} \approx 0{,}83 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} .$$

При заземлении одного из шаров заряд другого шара q остается прежним, а заряд заземленного шара приобретает противоположный знак и по модулю становится меньше заряда другого шара в N (определенное количество) раз. Потенциал заземленного шара равен нулю, поэтому выполняется условие

$$kq\left(\frac{1}{L} + \frac{2}{ND}\right) = 0 \text{, откуда } N \approx -\frac{2L}{D} = -20 .$$

После выполнения операции заземления в n-й раз заряд шара, заземленного последним, станет равным $Q/(-N)^n$. Разумным будет величина заряда во много раз большая единичного заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл . Получается, что всего операций заземления нужно провести столько, чтобы все еще выполнялось неравенство

$$\left(\frac{2L}{D}\right)^n < \frac{D^2 E_0}{4ke} = 5{,}2 \cdot 10^{12} > 20^n .$$

Число операций заземления, после которого получаются еще «разумные» величины зарядов на шарах, равно $n = 9$ (см. табл.). После десятого заземления (пятого для второго шарика) заряд на заземленном шарике 2 должен быть равен примерно $e/2$, чего, естественно, быть не может. Казалось бы, что в последние три клеточки таблицы надо поставить нули.

На самом деле заряды шариков не могут быть равными нулю. Есть, например, такое условие: за счет теплового движения энергия заряженного шарика $2kq^2/D$ не может быть меньше чем $k_{\text{Б}}T/2$ (здесь $k_{\text{Б}}$ – постоянная Больцмана). Эта энергия для шарика диаметром 10 см при температуре 300 К соответствует заряду $q \approx 5 \cdot 10^{-17}$ Кл . Таким образом, уже восьмое по счету заземление дает «неразумное» значение заряда на одном из шариков.

С.Зарядов

Ф2419. *Известно, что масса Солнца равна $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Примерно 73% массы Солнца – это водород, 25% массы – гелий, а на остальное приходится всего-то 2% массы Солнца. Источником энергии Солнца являются ядерные реакции превращения водорода в гелий, которые идут в небольшой (в сравнении с размерами самого Солнца) области вблизи его центра. Другие реакции, в частности реакции превращения гелия в углерод и т.д., по расчетам ученых начнут происходить в Солнце только на финальной стадии эволюции. Через какое время доля водорода в массе Солнца станет равной 72%?*

Для справки:

солнечная постоянная вблизи Земли $W = 1370$ Вт/м^2 , масса протона $m_{\text{п}} = 1{,}0072765$ а.е.м., протон массивнее электрона в 1836,1527 раз, масса ядра гелия-4 $m_{\text{г}} = 4{,}00260325415$ а.е.м.

Чтобы образовалось одно ядро гелия, нужно соединить 4 ядра водорода (4 протона) и 2 электрона, и при этом масса ядра гелия будет меньше исходной суммарной массы составляющих частиц на $\Delta m = 0{,}0276$ а.е.м. Энергия, «сброшенная» в результате такого превращения, равна Δmc^2 . За то время пока масса водорода в Солнце уменьшится с 73% до 72%, т.е. 1% массы водорода превратится в гелий, будет выделена энергия

$$E = \frac{0{,}01M}{4m_{\text{п}} + 2m_e}\Delta mc^2 \approx 0{,}685 \cdot 10^{-4} Mc^2 = 1{,}23 \cdot 10^{43} \text{ Дж} .$$

Солнечная постоянная на расстоянии от Солнца, равном расстоянию от Земли до Солнца, равна $W = 1370$ Вт/м^2 . Среднее расстояние от Солнца до Земли $L = 150$ млн км. Следовательно, Солнце излучает мощность, равную $W \cdot 4\pi L^2 = 3{,}85 \cdot 10^{26}$ Вт . Отсюда получаем оценку искомого времени:

$$t = \frac{E}{W \cdot 4\pi L^2} = 3{,}2 \cdot 10^{16} \text{ с} \approx 1 \text{ млрд лет} .$$

М.Солнцев

От подстановки корня до трансцендентного числа

В этой статье мы начнем с решения одной олимпиадной задачи об оценке корня многочлена, а в конце построим явный пример трансцендентного числа.

Осенью этого года на Турнире городов школьникам предлагалась такая задача (она же – задача М2407 «Задачника «Кванта», автор – А.Храбров).

Задача. *Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше чем 1/2016.*

Жюри турнира обсуждало вариант – дать ее для квадратного трехчлена, но побоялось, что школьники бросятся выписывать формулу корней через дискриминант и погрязнут в вычислениях. В итоговой формулировке многочлен имеет произвольную степень, так что (к счастью!) никаких формул для корня у нас нет. Как же тогда решать задачу? Остается только предположить противное, что у многочлена есть положительный корень α, меньший $1/2016$, подставить его в многочлен и посмотреть, что получится.

Введем обозначения. Пусть $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ – наш многочлен. Можно считать, что его свободный член a_0 ненулевой (иначе найдем $a_i \neq 0$ с наименьшим индексом i и разделим f на x^i) и даже положительный (иначе домножим f на -1).

Тогда значение $f(\alpha)$ не меньше чем самое маленькое возможное – когда все коэффициенты от a_n до a_1 равны -2015, а коэффициент a_0 равен 1 (он ведь целый и больше нуля). Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии, получаем

$$f(\alpha) \geq -2015\alpha^n - \ldots - 2015\alpha^2 - 2015\alpha + 1 =$$
$$= -2015\left(\alpha^n + \ldots + \alpha + 1\right) + 2016 = -2015 \cdot \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + 2016 >$$
$$> -2015 \cdot \frac{1}{1-\alpha} + 2016 \geq -2015 \cdot \frac{1}{1-1/2016} + 2016 = 0,$$

т.е. $f(\alpha) > 0$. Противоречие.

Простая идея – подставить число в многочлен – помогла решить задачу. Жалко на этом останавливаться – поищем еще какие-нибудь интересные применения нашей идеи. Для удобства договоримся наибольший из модулей коэффициентов у многочлена f называть *нормой многочлена* f и обозначать $\|f\|$. Только что мы доказали: если у непостоянного многочлена с целыми коэффициентами норма не превосходит 2015, то положительный корень многочлена больше $1/2016$. Первое обобщение очевидно напрашивается.

Упражнение 1. Пусть α – ненулевой корень непостоянного многочлена с целыми коэффициентами и $\|f\| \leq A$. Докажите, что $|\alpha| > \dfrac{1}{A+1}$.

Небольшой трюк позволяет теми же рассуждением оценить корень сверху.

Упражнение 2. Пусть α – корень непостоянного многочлена с целыми коэффициентами и $\|f\| \leq A$. Докажите, что $|\alpha| < A + 1$.

Указание. Если $\alpha \neq 0$ – корень многочлена $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$, то $\dfrac{1}{\alpha}$ – корень многочлена $a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

Но это еще далеко не все. Попробуем вместо расстояния от корня до нуля рассмотреть расстояние от корня до другого какого-нибудь числа – скажем, до фиксированного рационального числа $\dfrac{p}{q}$. Конечно, $\dfrac{p}{q}$ может просто совпасть с корнем. А если не совпадет – насколько близко сможет подобраться? Давайте оценим. Ответ будет зависеть уже не только от нормы многочлена, но и от самого $\dfrac{p}{q}$ и приведет нас к замечательной теореме Лиувилля о приближениях и к явному построению примеров трансцендентных чисел!

Итак, пусть $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ – ненулевой многочлен степени не выше n, с целыми коэффициентами, причем $\|f\| \leq A$. Пусть $\dfrac{p}{q}$ – рациональное число (с целым p и натуральным q), а α – корень f, отличный от $\dfrac{p}{q}$. Наша задача – оценить снизу модуль числа $\beta = \alpha - \dfrac{p}{q}$.

Согласно упражнению 2, $|\alpha| < A + 1$. Если число $\left|\dfrac{p}{q}\right|$ достаточно велико – скажем, больше $A + 2$, то и $|\beta| = \left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right|$ не слишком маленькое – больше 1. Нам же интересно, насколько близко к α может находиться $\dfrac{p}{q}$, так что далее рассматриваем случай $\left|\dfrac{p}{q}\right| \leq A + 2$. (Забегая вперед, скажем, что в этом случае мы оценим $|\beta|$ снизу числом, меньшим 1, т.е. доказанная далее оценка будет верна для *всех* $\dfrac{p}{q}$, отличных от α.)

Чтобы свести ситуацию к разобраной в упражнении 1, сделаем сдвиг на $\dfrac{p}{q}$, т.е. рассмотрим многочлен $f\left(x + \dfrac{p}{q}\right)$. Его коэффициенты могут быть не целыми, но это легко исправить домножением на q^n. Поэтому рассмотрим многочлен

$$g(x) = q^nf\left(x + \frac{p}{q}\right) =$$
$$= q^n\left(a_n\left(x + \frac{p}{q}\right)^n + \ldots + a_1\left(x + \frac{p}{q}\right) + a_0\right).$$

Тогда g имеет целые коэффициенты и $g(\beta) = 0$. Чтобы оценить $|\beta|$, осталось оценить норму многочлена g, а для этого достаточно оценить нормы многочленов, суммой которых является g.

Упражнение 3. а) Найдите норму многочлена $(x-1)^5$.

б) Докажите, что $\left\|(x-1)^n\right\| \leq 2^n$.

в) Докажите, что $\left\|(x-1)^{100}\right\| = C_{100}^{50}$.

г) Докажите, что $\left\|(x-3)^n\right\| \leq 6^n$.

У многочлена $\left(x + \dfrac{p}{q}\right)^k$ каждый коэффициент имеет вид $C_k^m\left(\dfrac{p}{q}\right)^m$. Поскольку $C_k^m < 2^k \leq 2^n$, а $\left|\dfrac{p}{q}\right|^m \leq (A+2)^m \leq (A+2)^n$, то норма у $\left(x + \dfrac{p}{q}\right)^k$ не превосходит числа $2^n(A+2)^n$. Каждый коэффициент у g складывается из не более чем $(n+1)$ таких чисел, умноженных на q^n, откуда

$$\|g\| \leq (n+1) \cdot 2^n (A+2)^n q^n.$$

Тогда, по упражнению 1 и учитывая, что $\|g\| \geq 1$, можем написать

$$|\beta| > \frac{1}{\|g\| + 1} \geq \frac{1}{2\|g\|} \geq \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}(A+2)^n} \cdot \frac{1}{q^n}.$$

Первый сомножитель в правой части этого неравенства обозначим $C(n,A)$. Константа $C(n,A)$ зависит только от n и A (ограничений на степень и норму f). Итак:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>C(n,A)\frac{1}{q^n}. \qquad (*)$$

Пора перевести дух и понять, что можно извлечь из полученного результата.

Определение. Вещественное число α называется *n-неприближаемым*, если найдется такое положительное число c, что при любом целом p и натуральном q выполнено одно из двух условий:

$$\alpha=\frac{p}{q} \text{ или } \left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^n}.$$

Упражнение 4. Покажите, что из доказанной нами оценки следует *теорема Лиувилля*: корень многочлена с целыми коэффициентами и степенью, не превосходящей n, является n-неприближаемым.

Поясним смысл данного определения и теоремы Лиувилля. Пусть мы хотим приблизить некоторое положительное число α отличным от него рациональным числом $\frac{p}{q}$. Выбрав знаменатель q, двинемся по числовой прямой из нуля шагами длины $\frac{1}{q}$ в сторону α и найдем число шагов p, чтобы оказаться на столь малом расстоянии от α, насколько это возможно при выбранном q. Далее можем уменьшить q так, чтобы наши шаги стали меньше уже достигнутого расстояния до α: такими шагами мы сможем подобраться к α еще ближе, и так далее. Но при этом возрастет q. Хорошо иметь приближения $\frac{p}{q}$, в которых и знаменатель не слишком большой, и расстояние до корня маленькое. Можно даже ввести понятие *n-коэффициента качества приближения*: это расстояние от $\frac{p}{q}$ до корня, умноженное на знаменатель в степени n (т.е. $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|q^n$). Чем больше n и чем ближе к нулю коэффициент качества, тем лучше приближение. Так вот, теорема Лиувилля говорит: к корню многочлена степени n мы не сможем подобрать приближение со сколь угодно маленьким положительным n-коэффициентом качества. Найдется такая положительная константа c, что n-коэффициент качества всегда будет больше нее.

Это подсказывает идею, как построить *трансцендентное число*, т.е. такое число, которое не является корнем никакого ненулевого многочлена с целыми коэффициентами: у него для любого n должно найтись приближение со сколь угодно маленьким положительным n-коэффициентом качества.

Изготовить такое число непросто, но мы применим небольшую хитрость: построим такое α, что при каждом n найдется приближение $\frac{p}{q}$, для которого $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<C(n,n)\frac{1}{q^n}$. Здесь $C(n,n)$ – та самая определенная выше константа $C(n,A)$, в которой взято $A=n$.

Построенное таким образом число α ни для какого n не может быть корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, у которого и степень, и норма не выше n. А тогда оно вообще не может быть корнем никакого ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами: иначе рассмотрим n, равное максимуму из нормы и степени $P(x)$, и получим противоречие.

Будем строить положительное трансцендентное число α в виде бесконечной десятичной дроби, запись которой содержит лишь нули и единицы, причем единицы встречаются все реже и реже. Более точно,

$$\alpha=\frac{1}{10^{n_1}}+\frac{1}{10^{n_2}}+\frac{1}{10^{n_3}}+\ldots, \qquad (**)$$

где $n_1<n_2<\ldots$ – последовательность номеров $n_1, n_2, \ldots$, где у нас после запятой стоят единицы и которую нам предстоит правильно подобрать.

Возьмем $n_1=1$ и заметим, что число $\alpha=0{,}1\ldots$ заведомо меньше чем 0,2 и не может быть корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, степени не выше 1 и нормы не выше 1 (докажите!).

Будем подбирать каждое следующее n_k так, чтобы α не являлось корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами, у которого степень и норма не превосходят k (как бы в дальнейшем ни выбирались показатели $n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots$).

Пусть мы уже выбрали номера $n_1, \ldots, n_{k-1}$. Сумму первых $k-1$ слагаемых в правой части ($**$) обозначим α_{k-1} – это будет очередное приближение к α. Сумма остальных слагаемых (хвост дроби) – это расстояние между α и α_{k-1}.

Число α_{k-1} можно записать в виде $\alpha_{k-1}=\frac{p}{q}$, где $q=10^{n_{k-1}}$. Заметим, что хвост $\alpha-\alpha_{k-1}=\frac{1}{10^{n_k}}+\frac{1}{10^{n_{k+1}}}+\ldots$ положителен и заведомо меньше $\frac{1}{10^{n_k-1}}$. Тогда выберем n_k, большее n_{k-1}, так, чтобы $\frac{1}{10^{n_k-1}}$ оказалось меньше фиксированного числа $\frac{C(k,k)}{q^k}=\frac{C(k,k)}{10^{kn_{k-1}}}$. Разумеется, это возможно, поскольку n_k можно взять сколь угодно большим.

Тогда получим, что $\left|\alpha-\alpha_{k-1}\right|<\frac{C(k,k)}{q^k}$, что и требовалось (оценка ($*$) не выполняется).

Последовательно выбирая n_k, определяем α формулой ($**$). Трансцендентное число построено.

Подходящие последовательности n_k можно, конечно, указать и явно.

Упражнение 5. Докажите, что число $\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\ldots$ трансцендентно.

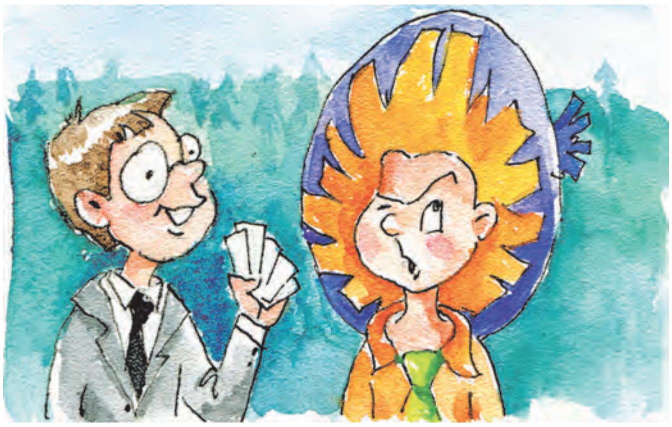
Заинтересовавшимся этой темой рекомендуем прочитать статью Н.Фельдмана «Алгебраические и трансцендентные числа» в «Кванте» №7 за 1983 год.

С.Дориченко, П.Кожевников

Задачи

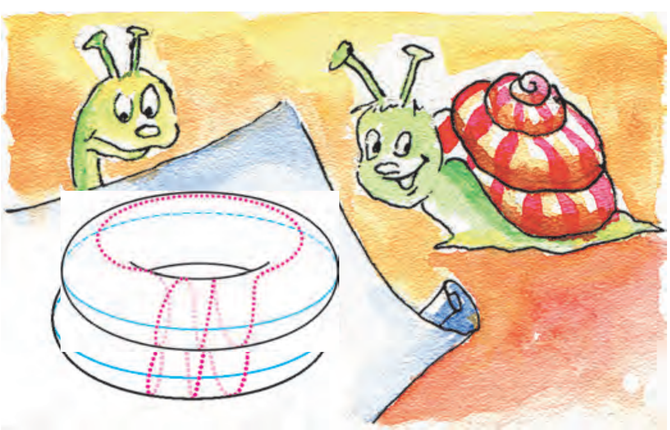
1. У Незнайки есть пять карточек с цифрами: 1, 2, 3, 4 и 5. Помогите ему составить из этих карточек два числа – трехзначное и двузначное – так, чтобы первое число делилось на второе.

А.Шаповалов



2. По поверхности планеты, имеющей форму бублика, проползли, оставляя за собой следы, две улитки: одна по красной линии, а другая по синей (как на рисунке). На сколько частей разделили поверхность планеты следы улиток?

С.Смирнов, И.Ященко



3. Аня захотела вписать в каждую клетку таблицы 5×8 по одной цифре так, чтобы каждая цифра встречалась ровно в четырех рядах. (Рядами мы считаем как столбцы, так и строчки таблицы.) Докажите, что у нее ничего не получится.

Е.Бакаев

4. Один угол треугольника равен $60°$, а лежащая против этого угла сторона равна трети периметра треугольника. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

М.Волчкевич

5. На конкурсе «А ну-ка, чудища!» стоят в ряд 15 драконов. У соседей число голов отличается на 1. Если у дракона больше голов, чем у обоих его соседей, его считают хитрым, если меньше, чем у обоих соседей, – сильным, а остальных (в том числе стоящих с краю) считают обычными. В ряду есть ровно четыре хитрых дракона – с 4, 6, 7 и 7 головами и ровно три сильных – с 3, 3 и 6 головами. У первого и последнего драконов голов поровну.

а) Приведите пример того, как такое могло быть.

б) Докажите, что число голов у первого дракона во всех примерах одно и то же.

А.Шаповалов, И.Ященко

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXVII Математическом празднике.

Коровы Исаака Ньютона

И.АКУЛИЧ

Как пишет Я.И.Перельман в книге «Занимательная алгебра» (глава II, статья «Коровы на лугу»), по некоторым сведениям, эту сельскохозяйственную задачу предложил сам Исаак Ньютон или, по крайней мере, кто-то из его современников:

Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее в 24 дня, а 30 коров – в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?

Прямой и с виду естественный подход наталкивается на непреодолимые трудности. В самом деле, 96 дней больше, чем 24 дня, ровно в 4 раза. Поэтому если 70 коров съедят траву в 24 дня, то, чтобы трапеза продолжалась вчетверо дольше, количество коров надо во столько же раз уменьшить, и оно становится равным $70 : 4 = 17{,}5$. При таком ответе сразу вспоминаются знаменитые *полтора землекопа* Виктора Перестукина[1], но это еще полбеды. Хуже другое: если опираться на другие данные условия, а именно не на 70 коров, а на 30, слопавших траву за 60 дней, то $96 : 60 = 1{,}6$, и потому потребное число коров становится равным $30 : 1{,}6 = 18{,}75$. В результате возникает мрачное ощущение безысходности, слегка смягченное надеждой, что условие просто-напросто содержит ошибку, а значит, и браться за такую задачу не имеет смысла.

Между тем, ошибок в задаче нет, и более внимательные сразу обратят внимание на первое предложение – о растущей траве. Вот где зарыта собака[2] – оказывается, пока коровы едят, трава успевает подрасти, и запас кормов на лугу увеличивается (хотя и не может обеспечить животным бесконечно долгое питание).

Как же решать такую задачу? Возможный подход предлагает сам Я.И.Перельман в той же книге. Процитируем его рассуждения.

Введем вспомогательное неизвестное, которое будет обозначать суточный прирост травы в долях ее запаса на лугу. В одни сутки прирастает y, в 24 дня – $24y$; если общий запас принять за 1, то в течение 24 дней коровы съедают $1 + 24y$. В сутки

[1] См. сказочную повесть Л.Б.Гераскиной «В стране невыученных уроков».

[2] В данном случае верней было бы сказать «зарыта корова».

все стадо (из 70 коров) съедает $\frac{1+24y}{24}$, а одна корова съедает $\frac{1+24y}{24\cdot 70}$. Подобным же образом из того, что 30 коров поели бы траву того же луга в 60 суток, выводим, что одна корова съедает в сутки $\frac{1+60y}{30\cdot 60}$. Но количество травы, съедаемое коровой в сутки, для обоих стад одинаково. Поэтому

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+60y}{30\cdot 60},$$

откуда $y=\frac{1}{480}$. Найдя y (величину прироста), легко уже определить, какую долю первоначального запаса травы съедает одна корова в сутки:

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+24\cdot\frac{1}{480}}{24\cdot 70}=\frac{1}{1600}.$$

Наконец, составляем уравнение для окончательного решения задачи: если искомое число коров x, то

$$\frac{1+96\cdot\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600},$$

откуда $x=20$. Двадцать коров поели бы всю траву в 96 дней.

Вот и все решение. Ничего не скажешь – добротно и основательно. Но уж очень громоздко. Пока до конца дочитаешь – уже и начало позабудешь. Нельзя ли как-нибудь короче?

Можно. И главной опорой в этом послужат не герои сюжета – коровы, а... *сам автор задачи*! Исаак Ньютон был не только гениальным математиком, но и не менее гениальным физиком (законы Ньютона говорят сами за себя!). Великий ученый поставил на строгие математические рельсы принцип относительности движения и умело его использовал в решении многих проблем. Так давайте и мы так переформулируем задачу, чтобы на передний план вышла ее физическая сущность. Для этого заменим луг с коровами рекой с катером. И вот что у нас выходит.

Назовем собственной скоростью катера его скорость при движении в стоячей воде. Если катер поплывет вверх по течению реки с собственной скоростью 70 км/ч, то он доберется до пункта назначения за 24 часа, а если он поплывет с собственной скоростью 30 км/ч, то он доберется до пункта назначения за 60 часов. С какой собственной скоростью ему надо плыть, чтобы достичь цели за 96 часов?

Здесь количество коров преобразовалось в скорость катера, а растущая трава – во встречное течение (правда, сами числовые значения получаются далекими от реальных, но кого это волнует). Далее, не слишком отклоняясь от Перельмана, обозначим собственную скорость катера через x, а скорость течения через y. Тогда одно и то же расстояние, которое проплыл (бы) катер, можно записать тремя способами, что порождает вот такую систему уравнений:

$$(70-y)\cdot 24=(30-y)\cdot 60=(x-y)\cdot 96.$$

Решается она проще пареной репы, а главное – проста и наглядна. Ответ, естественно, совпадает с тем, что был получен ранее: $x=20$ (значение же y нас вообще-то не интересует, но если полюбопытствовать и вычислить его, оно оказывается равным $3\frac{1}{3}$; сами сообразите, почему оно не совпадает с вычисленным ранее значением $\frac{1}{480}$).[3]

Как видим, знаменитое театральное восклицание: «Автора!» можно с успехом применять при решении математических задач. Чего и нашим читателям желаем. А в заключение, чтобы убедиться, что описанный прием освоен прочно и надежно, попробуйте решить другую, более сложную задачу, приведенную Перельманом в той же «Занимательной алгебре»:

Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$ га, 10 га и 24 га. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй – 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?

Как и следовало ожидать, решение, приведенное в книге Перельмана, заняло без малого две страницы текста (не будем его даже приводить). Но вы, конечно, обойдетесь меньшими затратами. Вперед!

---

[3] А тому, кто все-таки не сообразил, подскажем: значение $\frac{1}{480}$ появляется при обозначении всего пути (либо же его эквивалента – исходного запаса травы на лугу) через единицу, как это сделал Перельман. Мы же обошлись без этого и даже вообще длину пути не вычисляли – зачем нам лишняя работа? Между прочим, скорость течения реки, равная $3\frac{1}{3}$, свидетельствует о том, что будь скорость катера не больше этой величины – и он никогда не доберется до пункта назначения. В переводе на коровий язык это означает: если коров не больше $3\frac{1}{3}$, то они могут сколь угодно долго питаться на лугу, в противном случае продовольственная проблема неизбежна.

Буратино и его качели

С.ДВОРЯНИНОВ

— Тебе, наверное, трудная задача попалась? – обратился к Буратино с вопросом Папа Карло, оторвавшись от своего верстака.

– Почему ты так решил? – удивился Буратино.

– Да все очень просто. Перед тобой книга, но ты уже давно ее не перелистываешь и не открываешь новую страницу. Так бывает, когда ты обдумываешь сложную математическую задачу.

Моя книга вовсе не по математике, я читаю про приключения барона Мюнхгаузена. А задумался я вот над чем. Однажды этот барон будто бы сам себя за волосы вытащил из болота. Каждому понятно, что это невозможно по всем законам физики и что так никогда не бывает. Но я вот что вспомнил.

Когда я был совсем маленьким, ты качал меня на качелях. Я усаживался в креслице, и ты время от времени в такт его подталкивал. Я еще тебя просил: « Сильнее! Выше! Еще выше!» Тут все понятно – не мог же я сам себя толкнуть. Но вот вчера мы с ребятами качались на качелях, и тут ситуация была совсем другая. Заскочил я на качели и потом сам, без какой-либо помощи, раскачался очень даже сильно. Если бы ты в это время был рядом, то наверняка попросил бы меня быть осторожнее. Но дело не в этом. Мне кажется, что это раскачивание сродни вытаскиванию самого себя из болота. Но последнее никто не может сделать, а вот на качелях каждый может раскачаться. Почему так?

Наверное, тут скрыто какое-то противоречие и есть какая-то тайна. Мне хочется разобраться с этим вопросом. И это так интересно, что я готов прервать чтение увлекательной книжки о приключениях Мюнхгаузена. Так как же мы раскачиваемся на качелях?

– Что ж, будем разбираться, – Папа Карло стряхнул стружки с фартука и подсел к столу. – Давай бумагу. Вначале мы должны вспомнить про энергию. А именно, энергию механическую. Такая энергия бывает двух видов...

– Да, знаю, – уверенно подхватил Буратино. Энергия бывает кинетическая и потенциальная. Когда я разгоняюсь на самокате, то совершаю работу. И самокат, и я на нем движемся с нарастающей скоростью. Чем больше скорость, тем больше кинетическая энергия. Потом какое-то время я по инерции могу катиться с постоянной скоростью. Если при этом моя дорога пойдет вверх, то за счет накопленной кинетической энергии я могу и на горку закатиться. При движении вверх скорость уменьшается, кинетическая энергия тоже уменьшается. В конце концов я остановлюсь, кинетическая энергия станет равной нулю. Но энергия не исчезнет, она перейдет в энергию потенциальную. Эта энергия связана с высотой. Я же оказался на горке, и потому обладаю потенциальной энергией. Теперь я могу развернуться и покатиться вниз. При этом потенциальная энергия будет убывать – она будет переходить в кинетическую энергию движения.

– Ну что ж, я вижу, ты хорошо знаешь физику и тебе понятно, что так же меняется и твоя энергия, когда ты качаешься на качелях. Оказался ты на самом верху и на миг остановился – твоя потенциальная энергия самая большая, кинетическая же равна нулю. В самой нижней точке твоей траектории потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая оказывается самой большой. Важно, что при таких твоих колебаниях – так называют качания маятника, а твои качели это тот же маятник – выполняется закон сохранения энергии

$$K + \Pi = C,$$

где K – это кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия, C – постоянная величина для колебаний с данной амплитудой. Да, поясню: амплитуда – это размах колебаний.

– Следовательно, если хочу раскачиваться все сильнее и сильнее, т.е. подниматься все выше и выше, я должен увеличивать значение этой константы C. А этого можно добиться, увеличив либо значение K, либо значение $П$. Ясно! Когда ты раньше подталкивал мои детские качели, то ты увеличивал мою кинетическую энергию. Так же теперь могут действовать мои товарищи, если они рядом. Но даже если их и нет, я сам, один, могу раскачиваться все сильнее и сильнее. Как же это достигается? Вот это и есть мой главный вопрос! – с воодушевлением произнес Буратино.

– Давай выясним: какую энергию – кинетическую или потенциальную – ты можешь увеличить, находясь на качающихся качелях. Подтолкнуть сам себя ты не можешь, стало быть, вся надежда остается на увеличение потенциальной энергии. А вот увеличить ее действительно можно. И что ты для этого делаешь, находясь на качелях?.. А?.. Вспомнил?..

– Да, – обрадовался Буратино. Вспомнил! Стоя на дощечке, я попеременно то сгибаю ноги в коленях, то их распрямляю, т.е. по очереди приседаю и распрямляюсь. И когда я распрямляюсь, т.е. встаю в полный рост, то я совершаю работу по подъему своего центра масс (или центра тяжести), и эта работа переходит в потенциальную энергию качелей. Но потом, когда я приседаю, потенциальная энергия, – тут Буратино замолчал и на его лице появилось выражение разочарования.

– Так что там потенциальная энергия делает? – подбодрил его Папа Карло.

– Потенциальная энергия убывает, и, стало быть, никакого прироста полная энергия рассматриваемой механической системы не получает. Раскачаться сильнее не получается, – заключил Буратино с разочарованием.

– Давай не будем торопиться, а будем внимательными. Ведь эксперименты, т.е. твой опыт, говорят, что раскачивание происходит! Не опускай руки и не унывай, ищи теоретическое объяснение этого явления.

– Это грибы в лесу ищут, а объяснение где искать? – приуныл Буратино.

– Как где? В твоих рассуждениях! Бывает, что решил ты уравнение, сверил ответ и видишь, что ошибся. Начинаешь решать заново, аккуратно проводя все выкладки. Так и сейчас. Вот я тебе немного подскажу. Начнем с самого начала. Качаешься ты на качелях туда-сюда с постоянной амплитудой на согнутых в коленях ногах. И вот *в самой нижней точке* ты мгновенно встал в полный рост. Как ты думаешь, после этого амплитуда (т.е. размах) увеличится?

– Конечно. Я ведь поднял себя, совершил работу, увеличил потенциальную энергию, а значит, и общую энергию системы.

– Итак, есть способ увеличить потенциальную энергию. Может быть, и не на много, но увеличить. Хочется этот прием повторить. Верно? Иными словами, желательно опять встать в полный рост. Но сейчас ты уже стоишь и повторить этот прием невозможно. Как же быть?..

– Встать в полный рост можно только из состояния, в котором ноги согнуты в коленях. И поэтому теперь я должен присесть, – согласился Буратино.

Самое главное – выбрать момент, когда это следует сделать. Если согнуть ноги в коленях в самой нижней точке траектории, то убыль потенциальной энергии будет такой же, каким был перед этим ее прирост. Суммарный эффект от двух действий будет нулевым, мы вернемся на исходный режим колебания. Лучше всего присесть… Подумай, когда.

А чтобы дать правильный ответ, посмотри на две одинаковые лестницы. Только одна из них стоит вертикально (как пожарная лестница у дома), а другая – наклонно. Если по каждой лестнице подняться, скажем, на 10 ступенек, то в каком случае ты поднимешься на бóльшую высоту – по вертикальной лестнице или по наклонной? Здесь уместно вспомнить, что катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.

Все мне ясно! – весело произнес Буратино. Оказавшись в самой верхней точке траектории, я должен мгновенно присесть, согнуть ноги в коленях. При этом мое смещение по вертикали окажется *меньше* моего подъема по вертикали, который был в нижней точке траектории. Поэтому убыль потенциальной энергии будет меньше ее прироста. В результате двух действий – *распрямление в нижней точке и приседание в верхней точке* – качели получат прирост энергии, амплитуда колебаний увеличится.

Можно такие действия повторять, накачивая, тем самым, энергию в нашу механическую систему. При этом наши качели оказываются маятником переменной длины. Согнули ноги в коленях – получили длинный маятник длиной L, встали в полный рост – получили короткий маятник длиной l.

– Ну что же, с физикой разобрались. Ты можешь продолжить свое чтение, а я – свою работу. Но надо заметить, что мы дали простейшее объяснение того, как раскачиваются качели. Мы не учли всех обстоятельств.

Но это уже тема для другого разговора.

Аналогии – всюду

А.СТАСЕНКО

Зачем крутится ветр в овраге,
Подъемлет лист и пыль несет,
Когда корабль в недвижной влаге
Его дыханья жадно ждет?

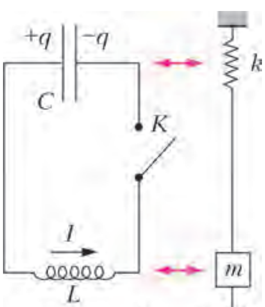
Зачем от гор и мимо башен
Летит орел, тяжел и страшен,
На чахлый пень? Спроси его.
Зачем арапа своего
Младая любит Дездемона,
Как месяц любит ночи мглу?

Затем, что ветру и орлу
И сердцу девы нет закона...

А.С.Пушкин

Несомненно, в этих параллельных сопоставлениях Поэт намекает на некоторые аналогии. Приступим и мы к их поиску.

Например, какую аналогию можно провести, сопоставляя механику грузика на пружинке и движение зарядов в электрическом контуре, содержащем емкость и индуктивность (см. рисунок)? Прежде всего, в обеих системах могут происходить колебания, и если нет потерь механической энергии на трение или на омическое сопротивление (оно отсутствует в идеализированной системе), то колебания, однажды возникнув, будут продолжаться вечно. А возникнуть они могут, если деформировать пружину, отклонив груз от положения равновесия, или замкнуть контур с предварительно заряженным конденсатором. И потенциальная энергия деформированной пружины



$L \leftrightarrow m,\ \frac{1}{C} \leftrightarrow k$

$$\Pi_m = \frac{kx_m^2}{2}$$

будет вечно через каждые четверть периода переходить в кинетическую энергию движущейся массы

$$K_m = \frac{mv_m^2}{2}.$$

Здесь и далее m (от *maximum*) в индексе означает наибольшую величину. Точно так же потенциальная энергия конденсатора

$$\Pi_m = \frac{(1/C)\,q_m^2}{2}$$

перейдет в кинетическую энергию катушки индуктивности

$$K_m = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Причем в любой момент времени сумма обоих видов энергии сохраняется:

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2} = \text{const}$$

и

$$\frac{(1/C)\,q^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{(1/C)\,q_m^2}{2} + \frac{LI_m^2}{2} = \text{const}.$$

Уже отсюда видно, что смещение грузика на пружине аналогично заряду конденсатора, скорость смещения аналогична электрическому току, масса грузика – индуктивности, а жескость пружины – величине, обратной емкости конденсатора. Все это можно записать так:

$$x \leftrightarrow q,\ \ m \leftrightarrow L,$$

$$v \leftrightarrow I,\ \ k \leftrightarrow \frac{1}{C}.$$

Полученные соотношения свидетельствуют о так называемой электромеханической аналогии. Об этом свидетельствуют и выражения для важнейшей характеристики колебательного процесса – круговой частоты. Для грузика на пружине она равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

для электрического контура –

$$\omega = \sqrt{\frac{1/C}{L}}.$$

Заметим, что в последней записи мы уже учли только что сделанное «открытие» об аналогии характеристик двух рассматриваемых схем.

Теперь можно сделать общий вывод: во всякой системе, обладающей инертным элементом («инертностью») и возвращающей силой («жесткостью»), могут возникнуть колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\text{«жесткость»}}{\text{«инертность»}}}.$$

«Жесткость» стремится вернуть систему в положение равновесия, а «инертность» приводит к тому, что система «проскакивает мимо» этого положения. И происходит периодическое превращение потенциальной энергии (в нашем случае соответствующей x_m и q_m) в кинетическую энергию (v_m и I_m). Получается, что мы можем оценить и частоту колебаний капли, и – даже страшно сказать – частоту колебаний Вселенной.

Действительно, в случае капли жесткость определяется коэффициентом поверхностного натяжения σ ($[\sigma] = \text{Н/м}$), стремящимся вернуть деформированную каплю к сферической форме, а инертность связана с ее массой m, так что

$$\omega \sim \sqrt{\frac{\sigma}{m}}$$

(проверьте размерность).

А Вселенная является громадным конденсатором потенциальной энергии тяготения, связанной с фундаментальной константой G ($[G] = \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$). Эту энергию можно оценить как $\Pi \sim G\frac{M^2}{R}$, где M и R – масса и радиус Вселенной. Уподобив эту энергию потенциальной энергии сжатой пружины, запишем

$$\Pi \sim \frac{kR^2}{2},$$

откуда получим «жесткость» Вселенной $k = \frac{GM^2}{R^3} \sim G\langle\rho\rangle M$, где $\langle\rho\rangle$ – средняя плотность. Теперь ясно, что если уж Вселенной придется колебаться, то частота этих колебаний будет порядка

$$\omega \sim \sqrt{\frac{k}{M}} \sim \sqrt{G\langle\rho\rangle}.$$

Принимая, согласно астрофизическим данным, $\langle\rho\rangle \sim 10^{-26}$ кг/м^3, получим $\omega \sim \sqrt{6\cdot10^{-11}\cdot10^{-26}}$ с$^{-1}$ $\approx 10^{-18}$ с$^{-1}$. Значит, период колебаний Вселенной составит

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 6\cdot10^{18}\text{ с} \approx 200\text{ млрд лет}.$$

(Здесь учтено, что 1 год $\approx 3\cdot10^7$ секунд.) А с момента Большого взрыва прошло уже порядка 10 миллиардов лет. Так что недолго осталось ждать, чтобы определить эти колебания: есть они или нет.

Впрочем, в поэтической аналогии, приведенной в эпиграфе, тоже можно найти «законы». Ветер предсказывает метеорология; орел, возможно, проводит обязательные тренировки высшего пилотажа; а Дездемоны всегда спешат замуж – хоть за арапа.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Закон Гука и коэффициент Пуассона, или Чем резина отличается от воды

П.СУРОВИН

Какая сила будет действовать на стенки абсолютно жесткого (при любых воздействиях размеры и форма не изменяются) сосуда, имеющего форму куба с ребром a, если налить в него воду и на поверхность воды положить невесомый поршень, к которому приложить силу F, как показано на рисунке 1? Ответ очевиден – в соответствии с законом Паскаля, давление воды будет везде одинаково и равно $p = F/a^2$. Иными словами, к стенкам сосуда будет приложена сила $F_{\text{ст}} = pa^2 = F$.

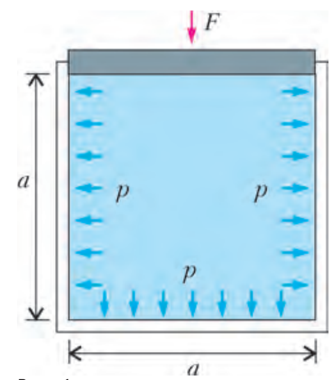


Рис. 1

Уберем теперь поршень и добавим в воду заранее приготовленный цемент.[1] Дождемся его затвердевания и вновь приложим силу F. Какие силы будут приложены к стенкам сосуда теперь? Может быть, по аналогии с предыдущим примером, получится F? Но закон Паскаля применим к жидкостям, он ничего не говорит о твердых телах. Может быть, ноль? Но и это сомнительно. Все видели, что происходит с пластилиновым кубиком, который хотят раздавить, – он увеличивается в поперечных размерах. Вполне вероятно, что цемент будет вести себя аналогичным образом. Но в нашем случае такое увеличение невозможно, так как стенки сосуда препятствуют поперечному расширению. Ясно только одно – давление кубика на дно сосуда равно $p = F/a^2$, иначе не будет равновесия. Но чему равно давление на стенки, неизвестно.

Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим деформирование полоски длиной l, шириной b и толщиной t. Растянем ее некоторой силой F и измерим длину l_1 и ширину b_1 после деформации (рис.2). Длина полоски при этом изменится на $\Delta l = l_1 - l$, а ширина изменится на $\Delta b = b_1 - b$. Удобнее, однако, пользоваться безразмерны-

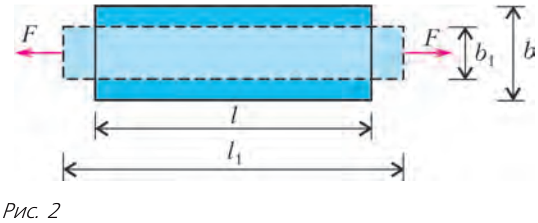


Рис. 2

[1] Считаем, что объем получившегося цементного кубика в точности равен объему воды. На самом деле во время химической реакции между водой и цементом объем уменьшится, но этой усадкой мы пренебрежем.

ми величинами $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и $\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$. Эти величины называют *относительной продольной деформацией* и *относительной поперечной деформацией* соответственно. Для краткости в дальнейшем слово «относительная» будем опускать. Кроме того, будем считать, что деформация положительна, если размер увеличивается, и отрицательна – если уменьшается. Это означает, что для полоски ε и ε' имеют разные знаки.

Как зависит продольная деформация от силы F? Чтобы не зависеть от размеров полоски, перейдем к относительной силе, которую получим, разделив силу на площадь поперечного сечения полоски: $\sigma = \frac{F}{bt}$. Эту величину называют *напряжением*. Будем считать напряжение положительным, если оно растягивающее, и отрицательным, если сжимающее. Многочисленные опыты показали, что зависимость между напряжением и продольной деформацией линейна, т.е. $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, где E – *модуль упругости* или *модуль Юнга*, который зависит только от материала. Те же опыты показали, что величина $\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ также постоянна и зависит только от материала. Эту величину называют *коэффициентом Пуассона*. Теперь мы можем получить поперечную деформацию: $\varepsilon' = -\nu\frac{\sigma}{E}$.

Однако какое отношение растяжение полоски имеет к нашей задаче? Оказывается, самое непосредственное. Вернемся к цементному кубику. Возьмем систему координат, в которой оси x, y и z направлены вдоль ребер кубика. Обозначим напряжения на гранях кубика σ_x, σ_y и σ_z соответственно (рис.3). Попробуем найти деформации ребер, которые обозначим ε_x – деформация вдоль оси x,

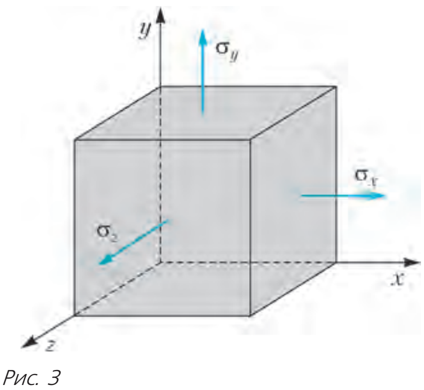


Рис. 3

ε_y – вдоль оси y и ε_z – вдоль оси z. Деформация ε_x вызывается тремя причинами. Первая – напряжение σ_x, и соответствующая деформация является продольной. Вторая причина – напряжение σ_y, и в этом случае деформация будет поперечной. Третья причина – напряжение σ_z, и деформация также поперечная. Складывая все три деформации, получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right).$$

Аналогичные рассуждения приводят к формулам

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z\right)$$

и

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y\right).$$

Эти три формулы есть *обобщенный закон Гука*.

Теперь посмотрим, в каком состоянии находится наш цементный кубик. Для него напряжение $\sigma_y = -\frac{F}{a^2}$, деформации $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$ (не забыли, что сосуд абсолютно жесткий?). Получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_x + \nu\frac{F}{a^2} - \nu\sigma_z\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\frac{F}{a^2} - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z\right),$$

$$0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\sigma_x + \nu\frac{F}{a^2}\right).$$

Решая эту систему, находим

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{F}{a^2}\frac{\nu}{1-\nu}, \quad \varepsilon_y = \frac{F}{Ea^2}\left(\frac{2\nu^2}{1-\nu} - 1\right).$$

Для цемента коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}2$. В таком случае

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{F}{4a^2}, \text{ а } \varepsilon_y = -0{,}9\frac{F}{Ea^2}.$$

При этом сила давления на стенки сосуда равна

$$F_{\text{ст}} = |\sigma_x| a^2 = \frac{F}{4}.$$

Пора перейти к вопросу, вынесенному в заголовок. Чем же отличается резина от воды? Для резины коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}5$. В этом случае $\sigma_x = \sigma_z = -\frac{F}{a^2}$ и $\varepsilon_y = 0$. Как истолковать полученный результат? Так как деформации по всем трем осям координат равны нулю, то размеры кубика не изменились. А неизменность размеров означает и неизменность объема.[2] Резина несжимаема! При этом сила давления на стенки сосуда равна

$$F_{\text{ст}} = |\sigma_x| a^2 = F.$$

А что же вода? При приложении давления 100 атм относительное изменение объема воды составит $1/200$, т.е. вода все-таки сжимается.

[2] Более общее рассмотрение приводит к соотношению $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, где $\frac{\Delta V}{V}$ – относительное изменение объема. Таким образом, для неизменности объема достаточно выполнения условия $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$. При этом совсем необязательно равенство нулю каждой из деформаций в отдельности.

В правой руке я держал... сосуд, другою же рукой пробовал извлечь искры из наэлектризованного ствола. Вдруг моя правая рука была поражена с такой силой, что все тело содрогнулось как от удара молнии... я думал, что пришел конец.

Питер ван Мушенбрук

При проведении экспериментов лейденская банка, покрытая станиолем, соединялась с проводом, через который наэлектризовывались полусферы...

Генри Кавендиш

Моя первая попытка отклонить пучок катодных лучей состояла в пропускании его между двумя металлическими пластинками... и в создании электрического поля между пластинками.

Джозеф Джон Томсон

...разность потенциалов двух проводников пропорциональна их зарядам ...коэффициент пропорциональности назвали емкостью, а систему двух проводников – конденсатором.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знаком вам конденсатор?

Не слишком ли много чести одному прибору в рубрике, традиционно посвященной фундаментальным законам, явлениям и понятиям?

Во-первых, уже более двух с половиной столетий он – непременный участник множества важнейших исследований. Открытие «лейденской банки» просто произвело революцию в опытах с электричеством, а в дальнейшем конденсаторы применялись во всех решающих экспериментах, в которых рождалась современная наука, вплоть до подтверждения теории относительности.

Во-вторых, конденсаторы до сих пор крайне важны для практики. Разрядка конденсатора в лампе-вспышке, возбуждение лазеров и люминесцентных ламп, действие дефибрилляторов, возвращающих пациента к жизни пропусканием через сердце импульсов тока, – лишь немногие области их применения. А что говорить о телевизорах и радиоприемниках, карманных калькуляторах и больших вычислительных машинах, микрофонах и телефонах и о многих других средствах коммуникации! Везде, где используются интегральные схемы, можно найти конденсаторы. Правда, они уже ничем не напоминают первые устройства для накопления зарядов – миниатюризация литровой «лейденской банки» позволила бы уместить ее в элементе, еле различимом на булавочной головке.

Ну, и в-третьих, вы не раз столкнетесь с конденсаторами в школьном курсе физики. Какое поле в них образуется, какие возможны варианты их соединения, как они накапливают и отдают энергию, как ведут себя в цепях постоянного или переменного тока, как пролетают через них заряженные частицы, как с их помощью принимают и передают информацию – вот вопросы, на которые надо уметь отвечать. Надеемся, этот выпуск «Калейдоскопа» поможет вам с ними справиться.

Вопросы и задачи

1. Можно ли зарядить «лейденскую банку», не заземляя одну из ее обкладок?

2. Как изменится напряженность поля между обкладками уединенного плоского конденсатора, если на одной из обкладок заряд будет увеличен в два раза?

3. В каком случае сила взаимодействия между обкладками помещенного в жидкий диэлектрик заряженного конденсатора: а) прямо пропорциональна диэлектрической проницаемости среды; б) обратно пропорциональна ей?

4. Плоский воздушный конденсатор, пластины которого расположены горизонтально, наполовину залит жидким диэлектриком с проницаемостью ε. Какую часть конденсатора надо залить этим же диэлектриком при вертикальном расположении пластин, чтобы емкости в обоих случаях были одинаковы?

5. Найдите емкость батареи конденсаторов, изображенной на рисунке 1, если емкость каждого конденсатора равна C.

6. Чему равна емкость C_x, если общая емкость представленной на рисунке 2 схемы равна $2C$?

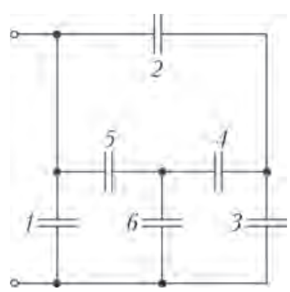


Рис. 1

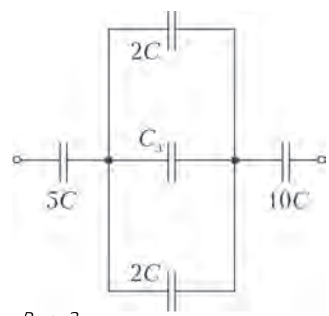


Рис. 2

7. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на одинаковых расстояниях друг от друга и соединены проводником, как указано на рисунке 3. Определите емкость такой системы, если емкость каждой отдельно взятой пары пластин равна C_0.

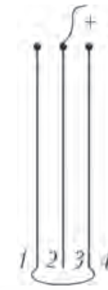


Рис. 3

8. Заряженный конденсатор подключили параллельно к такому же, но незаряженному. Во сколько раз изменилась энергия поля первого конденсатора?

9. В заряженный конденсатор вставляют край пластины из диэлектрика. Что произойдет, если пластину предоставить самой себе? Трением пренебречь.

10. Плоский конденсатор зарядили и отключили от источника тока. Как изменится объемная плотность энергии электрического поля внутри конденсатора, если увеличить в 2 раза расстояние между его обкладками?

11. Батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостями C_1 и C_2 подключена к источнику тока напряжением $\mathcal{E}$. Возможно ли, чтобы напряжение на конденсаторе емкостью C_1 равнялось нулю, а на конденсаторе емкостью C_2 равнялось $\mathcal{E}$?

12. Переменный ток прекращается, если цепь в каком-либо месте разорвать, в то время как включение в цепь конденсатора не приводит к такому же результату. Почему?

13. Электрическая лампа последовательно с диодом, к которому параллельно присоединены конденсатор и ключ, подключена к сети переменного напряжения (рис.4). Почему при замкнутом ключе лампа горит ярче, чем при разомкнутом?

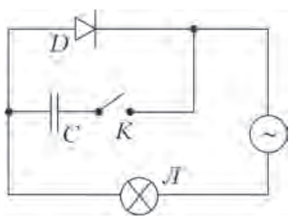


Рис. 4

14. Что произойдет с собственными колебаниями в электрическом контуре, активным сопротивлением которого можно пренебречь, если его емкость в 3 раза увеличить, а индуктивность в 3 раза уменьшить?

15. Через какую долю периода после подключения заряженного конденсатора к катушке индуктивности энергия в контуре распределяется между конденсатором и катушкой поровну?

Микроопыт

Пустите из водопроводного крана как можно более тонкую струйку. Натерев лист сухой бумаги о пластиковую поверхность, например о разделочную доску, поднесите их в вертикальном положении с разных сторон к струйке. Как она будет себя вести?

Любопытно, что...

...название первому электрическому конденсатору после опытов 1745 года, проведенных профессором университета голландского города Лейдена Питером ван Мушенбруком, дал французский физик Жан-Антуан Нолле. С тех пор «лейденская банка» вошла в обиход физиков как мощный и надежный источник электричества. Но полное понимание процессов зарядки и разрядки «банки» было достигнуто лишь в начале XX века.

...термин «конденсатор» (от латинского *сгущать*) ввел Алессандро Вольта в 1782 году. Первый же плоский конденсатор был изобретен еще в 1748 году. Плоские конденсаторы изготавливали также такие ученые, как Бенджамин Франклин, Франц Эпинус и Джамбаттиста Беккариа, разделяя их обкладки различными диэлектриками и соединяя их в батареи.

...использование сферического конденсатора позволило Генри Кавендишу установить закон взаимодействия электрических зарядов еще до Шарля Кулона; с помощью такого конденсатора Майкл Фарадей изучал влияние среды на электризацию тел; развитие опытов Фарадея привело к созданию электростатических генераторов – так, американский физик Роберт Ван де Грааф в 1933 году достиг в них напряжения 15 миллионов вольт.

...первым экспериментальным доказательством существования максвелловских токов смещения были опыты отечественного физика Николая Шиллера, наблюдавшего в 1875 году действие электромагнита на заряженный конденсатор.

...из различных экспериментов с разрядами «лейденских банок», проводившихся не одно десятилетие, Герман Гельмгольц сделал вывод о колебательном характере разряда. В 1853 году Уильям Томсон (лорд Кельвин) дал математическую теорию этого явления, выведя формулу для периода колебаний. К концу XIX века одним из первых нобелевских лауреатов немецким физиком Карлом Брауном был изобретен колебательный контур значительной емкости и с малым затуханием, что было существенно для развития радиотехники.

...конденсатор на рубеже XIX-XX веков оказался необходимым элементом в приборах, с помощью которых совершались эпохальные открытия. Например, в «трубке Томсона», использованной при открытии электрона и ставшей прообразом электронно-лучевой трубки. Или в опытах супругов Кюри по обнаружению радиоактивных элементов и весьма точному измерению радиоактивности, а также в установке Роберта Милликена по определению величины заряда электрона.

...заряды, располагающиеся в ионосфере, образуют совместно с Землей «природный конденсатор» емкостью несколько сотых фарада. Подобным естественным примером служит молния, представляющая собой разряд конденсатора, «обкладками» которого являются либо два облака, либо облако и поверхность Земли.

...для создания малогабаритных конденсаторов очень большой емкости используют сегнетокерамику на основе титаната бария с высокой, в несколько тысяч единиц, диэлектрической проницаемостью. В многослойных структурах из параллельно соединенных тонких слоев удается добиться емкости в несколько микрофарад.

...конденсатор остается значимым участником важных современных опытов. Так, с его помощью пытались обнаружить свободные кварки, обладающие дробными зарядами.

Что читать в «Кванте» о конденсаторах

(публикации последних лет)

1. «Перезарядка конденсаторов» – 2013, Приложение №1, с.140;

2.«Задачи на изменение энергии системы» – 2014, №2, с.38;

3. «Колебательный контур и законы сохранения» – 2014, №5/6, с.56;

4. «Конденсатор в коробке и потенциальность кулоновского поля» – 2015, Приложение №3, с.123;

5. «Электростатика для умных школьников» – 2016, №2, с.44.

Материал подготовил А. Леонович

Аплодисменты здесь тихие

В.ИЛЬИЧЕВ, А.МАРИНИН

Главная проблема экологии человека – бесконфликтное существование рядом с другими.

В.А.Долинский. Невольник свободы

ПРИ СООРУЖЕНИИ БОЛЬШИХ АУДИТОРИЙ, ТЕАТральных залов и тому подобного организаторам и строителям необходимо эффективно решить следующие две задачи.

1) *Видео-проблема*: каждый зритель вправе рассчитывать на полноценный обзор действия, происходящего на сцене. В принципе эта проблема была решена еще в далеком прошлом, когда зрительские места стали располагаться амфитеатром (рис.1).

Рис. 1. Древний Колизей изнутри: чем дальше от арены, тем выше ряд

2) *Аудио-проблема*, которая подразумевает «чистую» доставку звуков сцены (голоса певцов, драматических артистов и т.д.) до слушателей.

Вторая проблема оказалась сложнее первой. Причина этого в том, что свет ведет себя довольно просто – он не «любит» отражаться (конечно, кроме зеркальной поверхности), а звук не столь привередлив и отражаться «любит» (вспомните многократное эхо в горах). И тогда изза процессов интерференции (наложения) волн страдает качество звучания.[1]

Гипотетически, идеальная акустическая ситуация заключается в точечной доставке сценического голоса каждому конкретному слушателю. В этом случае интерференции не возникает. Однако можно ли такого добиться? Оказывается, можно, опираясь на некоторые замечательные свойства эллипса.

Для их обоснования понадобится решение известной задачи поиска минимума длины ломаного пути. А именно, такой. Почтальон из деревни A идет в деревню B, которые лежат по одну сторону реки. Требуется найти кратчайший путь из A в B, если по дороге почтальон решил обязательно искупаться в реке (рис.2).

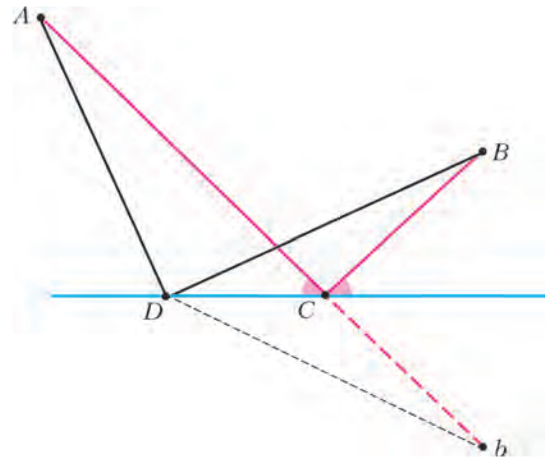


Рис. 2. Равенство углов в кратчайшем ломаном пути из A в B

Решение основано на замене одного (сложного) ломаного пути на другой равновеликий, но более простой путь. Так, построим «виртуальную» деревню b, расположенную симметрично B относительно реки. Тогда, очевидно, длина пути $AD + DB$ равна длине ломаной $AD + Db$. Разумеется, из всех таких ломаных, соединяющих деревни A и b, наименьшую длину имеет сам отрезок Ab. Точку пересечения Ab с рекой обозначим через C, тогда ломаная $AC + CB$ и есть искомый оптимальный путь.

Отметим, что острые углы отрезков AC и CB с горизонталью равны. А поскольку для волн (света или звука) угол падения равен углу отражения, то можно сказать, что луч света, а также звуковая волна успешно решают данную задачу поиска минимума (принцип наименьшего пути).[2]

Теперь напомним определение эллипса. Пусть на плоскости зафиксированы две точки S и P (так называемые фокусы) и задан параметр $R > SP$. Тогда эллипс – это множество точек плоскости C (рис.3), для которых выполняется равенство $SC + CP = R$.

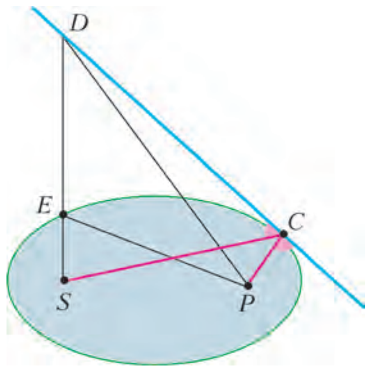


Рис. 3. Равенство углов фокусных отрезков с касательной

Очевидно, при совпадении фокусов эллипс превращается в окруж-

[1] Звуковой хаос вызывает сильные негативные эмоции. Так, наблюдая за развлечениями в одном из заведений общепита, С.Есенин печально заметил: «Шум и гам в этом логове жутком».

[2] Естественно-научные дисциплины буквально наводнены всякими принципами: Ле Шателье–Брауна, Дирихле и др. Да и в обыденной жизни их немало. Так, в одной восточной притче аксакал раскрыл внуку секрет своей долгой и успешной жизни. Оказывается, достаточно соблюдать лишь два принципа. Первый – если ты что-то кому-то пообещал, то выполни это обязательно. Второй – никогда никому ничего не обещай.

ность. А если точке C разрешается «бегать» по трехмерному пространству, то возникает замкнутая двумерная поверхность, напоминающая куриное яйцо.

Пусть на границе эллипса выбрана произвольная точка C, в которой проведена касательная. Далее, соединим точку C с каждым фокусом. Тогда оказывается, что отрезки SC и PC составляют с касательной одинаковые углы. Покажем это.

Наряду с путем SCP рассмотрим ломаную SDP, в которой точка D тоже находится на данной касательной (D не совпадает с C). Обозначим через E точку пересечения отрезка SD с границей эллипса. Очевидно, имеют место соотношения

$$SE + EP = SC + CP \text{ и } SD + DP > SE + EP.$$

Поэтому путь SCP является самым коротким. В силу предыдущего, углы данной ломаной с касательной прямой равны между собой. Значит, звук, выходящий из одного фокуса, после отражения обязательно входит в другой фокус. Разумеется, такое «правильное» движение звука будет иметь место как при сплошном, так и при частичном покрытии границы эллипса.

Теперь все готово, чтобы предъявить идеальную форму концертного зала.

Для простоты будем считать, что певец (P) и слушатели $\{S_1, S_2, \ldots\}$ находятся в одной плоскости. Далее все дело в конструкции крыши. Так, для каждой пары $\{P, S_i\}$ мысленно проведем эллипс и на его верхней части оставим небольшую площадку, соответствующую фрагменту его границы (рис. 4). В силу свойства «правильного» отражения, голос певца будет благополучно достигать «своего» слушателя. Осталось только подобрать «хорошие» параметры эллипсов, чтобы крыша (своеобразный панцирь черепахи) в целом выглядела не слишком бугристой.

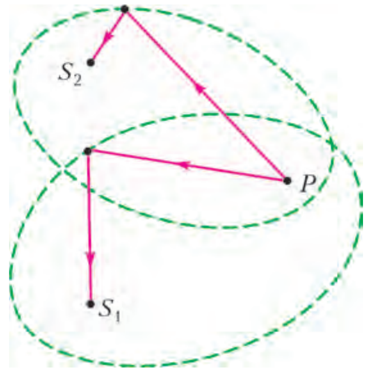


Рис. 4. Индивидуальная доставка голоса певца слушателям

Последнее. Если певец оказался очень хорошим, то ему необходимо позаботиться и о своей безопасности. Так, бурные и продолжительные аплодисменты вызовут, по сути, обращение всех стрелок на рисунке 4. Это может травмировать слух и даже привести к нежелательному для певца исходу. Здесь можно предложить две меры безопасности. Первая: певец может в конце выступления выйти из своего фокуса (войти в акустическую тень). Вторая: все фрагменты крыши поворачиваются на небольшой угол, и тогда исчезают губительные резонансные свойства акустики.

В заключение хочется порекомендовать читателям научно-популярную книгу Г.А.Гальперина и А.Н.Землякова «Математические бильярды», в которой содержится много интересных и неожиданных геометрических свойств эллипса и их приложений. [3]

[3] Среди множества математических дисциплин большинство ученых отдают явное предпочтение геометрии. В частности, Ю.П.Соловьев констатирует: *«Виноват конкретно Пифагор, который сказал, что «ВСЕ есть число»! Большую неправду для математики трудно придумать и сегодня! Хотя к пифагоровым штанам претензий нет…Скроены на века»* («Дискретная математика без формул»).

О двух классах треугольников, или Откуда берутся задачи

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Когда б вы знали, из какого сора
Растут стихи, не ведая стыда...

А.Ахматова

МАТЕМАТИКОВ ЧАСТО СПРАШИВАЮТ, ОТКУДА БЕрутся задачи. Возможно, эта статья даст частичный ответ на этот вопрос. Для начала мы рассмотрим несколько задач, предлагавшихся в разные годы на олимпиадах, затем исследуем некоторые свойства треугольников, о которых идет речь в этих задачах, и в результате придумаем еще две задачи, одна из которых – это задача М2405 (см. «Задачник «Кванта» №5–6 за 2015 г.).

Задача 1. *Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках P, Q, расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CX, CY к другой (X, Y – точки касания). Прямая CX вторично пересекает первую окружность в точке A. Найдите расстояние AY.*

Эта задача предлагалась на Первой олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина и не была решена ни одним из участников. Хотя, если знать историю ее возникновения, она совсем несложная. Дело в том, что в процессе подготовки олимпиады у одного из членов жюри возник вопрос: существуют ли треугольники, у которых радиус описанной окружности равен радиусу одной из вневписанных? Разумеется, сам по себе этот вопрос большого интереса не представляет, так как положительный ответ на него более-менее очевиден, но он естественным образом влечет другой вопрос о свойствах таких треугольников. И прежде всего, хочется выяснить, как такие треугольники строить. Ответ дает хорошо известная *формула Эйлера*, точнее, ее модификация для вневписанных окружностей.

Упражнения

1. Докажите, что, если O, I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника, а R, r – их радиусы, то $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

2. Докажите, что если O, I' – центры описанной и вневписанной окружностей треугольника, а R, r' – их радиусы, то $OI'^2 = R^2 - 2Rr'$.

(Доказательства формул из упражнений 1, 2 можно найти, например, в статье «Эйлер и геометрия» в «Кванте» №3 за 2007 г.)

3 (Л.Емельянов, Т.Емельянова). Окружности ω и ω_1 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что эти окружности являются соответственно описанной и вневписанной окружностями некоторого треугольника тогда и только тогда, когда касательная к ω_1 в точке P и одна из общих касательных к окружностям пересекаются на ω.

Теперь нетрудно понять, откуда взялась задача 1. Если радиусы описанной и вневписанной окружностей треугольника равны 1, то по формуле Эйлера расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}$, а тогда легко видеть, что общая хорда этих окружностей тоже равна 1. Отсюда получаем решение.

Решение. Пусть O – центр окружности, на которой лежит точка C, O' – центр другой окружности. Так как

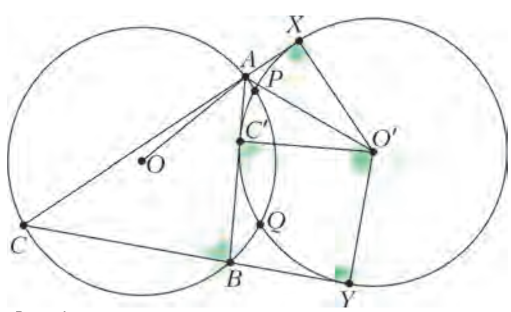


Рис. 1

$OO' = \sqrt{3}$, прямая AB касается второй окружности в некоторой точке C' (рис.1). Следовательно,

$$\angle AO'Y = \angle AO'C' + \angle C'O'Y =$$
$$= \frac{1}{2}\angle XO'C' + \angle C'O'Y = \frac{1}{2}\angle CAB + \angle ABC.$$

Далее,

$$\angle O'AO = \angle BAO' + \angle OAB = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A + \frac{\pi}{2} - \angle BCA =$$
$$= \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}\angle CAB + \angle ABC.$$

Получаем, что углы $AO'Y$ и $O'AO$ равны. Так как $YO' = OA$, то $AO'YO$ – равнобокая трапеция, поэтому $AY = OO' = \sqrt{3}$.

Изучим подробнее свойства треугольников с равными описанной и вневписанной окружностями. Будем считать, что описанная окружность треугольника ABC равна его вневписанной окружности, касающейся стороны AB. Воспользуемся следующей формулой, верной для любого треугольника.

Упражнение 4. Докажите, что радиус вневписанной окружности $r_c = 4R\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$.

Из упражнения 3 следует, что в наших треугольниках $\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2} = \frac{1}{4}$. Используя формулы преобразования произведений тригонометрических функций в суммы, этому равенству можно придать более изящный вид.

Упражнение 5. Докажите эквивалентность равенств $\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2} = \frac{1}{4}$ и $\cos\angle C = \cos\angle A + \cos\angle B$.

Последнему равенству нетрудно придать геометрический смысл. Так как расстояния от центра O описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равны $R\cos\angle A$, $R\cos\angle B$, $R\cos\angle C$ (для тупоугольного это тоже верно, если расстояния считать ориентированными), то расстояние от O до прямой AB равно сумме расстояний до двух прямых AC и BC. Легко назвать еще две точки, обладающие этим свойством, – это основания биссектрис AL_a, BL_b треугольника (подробнее о прямой L_aL_b можно прочитать в статье Г.Филипповского и А.Карлюченко «Лемма биссектрального треугольника» в «Кванте» №2 за 2016 г.). Отсюда сразу получаем, что O лежит на прямой L_aL_b.

Пусть теперь AH_a, BH_b, CH_c – высоты треугольника. Рассмотрев подобие (композицию симметрии относительно биссектрисы угла C и гомотетии с центром C и коэффициентом $\cos\angle C$), переводящее треугольник ABC в H_aH_bC, получим, что прямая H_aH_b делит биссектрису из вершины C в отношении $\cos\angle C:(1 - \cos\angle C)$, считая от вершины. С другой стороны, используя теорему о биссектрисе, несложно получить (сделайте это!), что центр I вписанной окружности делит биссектрису в отношении $(a+b):c$, считая от вершины (здесь и далее $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ – длины сторон треугольника). Нетрудно видеть (для проверки «в лоб» можно использовать теорему косинусов), что равенство $\cos\angle C = \cos\angle A + \cos\angle B$ равносильно равенству этих отношений, т.е. тому, что I лежит на H_aH_b.

Наконец, заметим, что биссектриса угла C является также биссектрисой угла OCH_c (докажите это). Значит, она пересекает отрезок OH_c в точке I', делящей его в отношении $R:h_c$, где $h_c = CH_c$. Отсюда расстояние от I' до AB равно

$$R\cos\angle C\cdot\frac{I'H_c}{OH_c} = R\cos\angle C\cdot\frac{h_c}{h_c+R}.$$

Поскольку расстояние от H до стороны BC равно $h_c\cos\angle B$, расстояние от I' до BC равно

$$R\cos\angle A\cdot\frac{I'H_c}{OH_c} + h_c\cos\angle B\cdot\frac{I'O}{OH_c} =$$
$$= R\cos\angle A\cdot\frac{h_c}{h_c+R} + h_c\cos\angle B\cdot\frac{R}{h_c+R} =$$
$$= R(\cos\angle A + \cos\angle B)\cdot\frac{h_c}{h_c+R}.$$

Получаем, что $\cos\angle C = \cos\angle A + \cos\angle B$ тогда и только тогда, когда I' равноудалена от сторон AB и CB, т.е. совпадает с I.

Мы связали условие $R = r_c$ равенства описанной и вневписанной окружностей с другими интересными свойствами треугольника. Сведем все полученные результаты в одно утверждение.

Утверждение 1. *Для неравнобедренного треугольника ABC следующие условия равносильны (внимательно проследив за рассуждениями выше, убедитесь в равносильности условий!) (рис.2):*

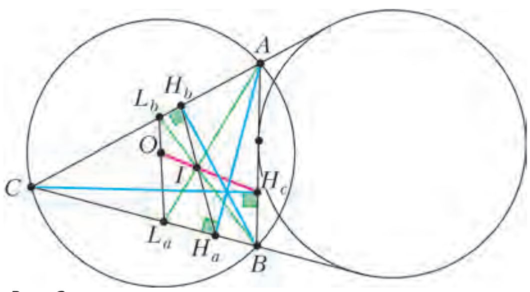


Рис. 2

- $R = r_c$;
- $\cos\angle C = \cos\angle A + \cos\angle B$;
- *O лежит на прямой* L_aL_b;
- *I лежит на прямой* H_aH_b;
- *прямая OI проходит через* H_c.

Рассмотренные треугольники обладают еще многими интересными свойствами, но не будем лишать читателей удовольствия обнаружить их самостоятельно. Также о них можно прочитать в материалах XXVII Летней конференции Турнира городов (http://www.turgor.ru/lktg/2015/3/index.htm).

А мы перейдем к изучению другого класса треугольников. Начнем со следующей задачи.

Задача 2 (Ф.Ивлев, IX Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина). *Пусть T_b и T_c – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB соответственно, а K – точка касания вневписанной окружности треугольника, вписанной в угол A, с продолжением стороны AC (рис.3). Докажите, что ортоцентр*

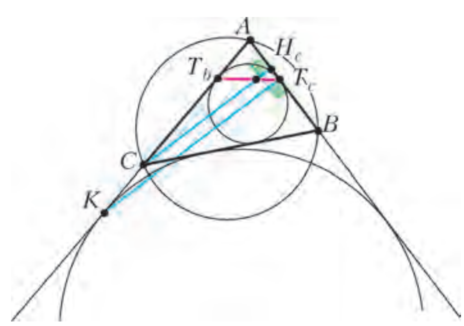


Рис. 3

H треугольника ABC лежит на прямой T_bT_c тогда и только тогда, когда $KT_c \perp AB$.

Решение. В отличие от задачи 1, эта задача решается сравнительно просто. Действительно, пусть $KT_c \perp BA$. Тогда по теореме Фалеса высота, проведенная из C, делит отрезок T_bT_c в отношении $T_bC : CK = (p-c):(p-b)$, где p – полупериметр. Аналогичная выкладка показывает, что через ту же точку проходит и высота, опущенная из вершины B.

Обратное утверждение предлагаем читателям доказать самостоятельно.

Задача 3 (И.Яковлев, XI Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина). *В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AH_a, BH_b, CH_c и отмечены точки S_a, S_b, S_c, в которых вневписанные окружности касаются сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая H_bH_c касается вписанной окружности треугольника. Докажите, что точка H_a лежит на окружности $S_aS_bS_c$.*

Решение. Пусть вписанная окружность ω касается сторон AB, BC, CA в точках T_c, T_a, T_b соответственно, а вневписанная окружность ω_a касается прямой AB в точке M (рис.4). Подобие с коэффициентом $\cos\angle A$, переводя-

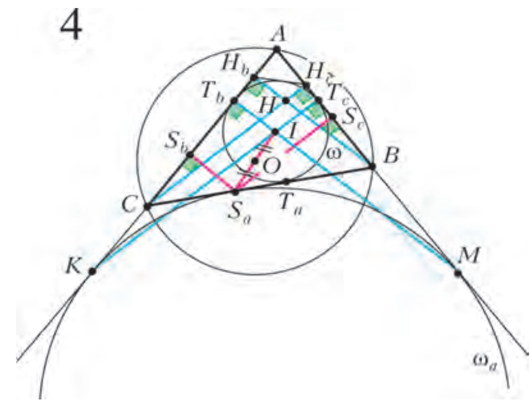


Рис. 4

щее треугольник ABC в AH_cH_c, переводит окружность ω_a в ω. Значит, $AT_b : AM = \cos\angle A$, т.е. $MT_b \perp AC$, и MT_b проходит через I. (Можно уже понять, что в задачах 2 и 3 речь идет об одном и том же классе треугольников! Заметить это можно и по-другому, с использованием известного свойства описанного четырехугольника: прямая, соединяющая точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью, – в нашем случае это T_bT_c – проходит через точку пересечения диагоналей.) Теперь в прямоугольном треугольнике MT_cI имеем $\angle MIT_c = \angle A$ и $MT_c = MB + BT_c = MB + BT_a = BS_a + CS_a = BC = a$, откуда $MI = a : \sin\angle A = 2R$. Значит, $\cos\angle A = IT_c/IM = r:(2R)$. Из подобия $\Delta ABC \sim \Delta AH_bH_c$ с коэффициентом $\cos\angle A$ получаем, что AH (диаметр окружности, описанной около AH_bH_c) равен r.

При гомотетии с центром S_a и коэффициентом 1/2 точка I переходит в точку, лежащую по одну сторону с I от стороны BC, проецирующуюся в середину M_a этой стороны и удаленную от нее на $r/2 = AH/2$ (здесь используем известное равенство $AH = 2OM_a$, верное для любого треугольника); такая точка одна, и это O. Значит, O – середина S_aI.

Так как точки T_c и S_c симметричны относительно середины AB, то перпендикуляр к AB, проведенный через S_c, симметричен прямой IT_c относительно O, значит, он проходит через точку, симметричную точке I относительно O, т.е. через S_a. Тем самым, $\angle S_aS_cA = 90° = \angle AH_aS_a$. Аналогично, $\angle S_aS_bA = 90°$. Это значит, что все пять точек A, S_a, S_b, S_c, H_a лежат на окружности с диаметром AH_a.

Заметим, что в процессе решения из подобия $\Delta ABC \sim \Delta AH_bH_c$ мы получили равенства $r = AH = 2R\cos\angle A$ и $r = r_a\cos\angle A$, т.е. радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC, вдвое больше радиуса описанной окружности. Применив формулу Эйлера, получаем, что расстояние между центрами этих окружностей равно $R\sqrt{5}$, а значит, они пересекаются под прямым углом. Кроме того, по утверждению упражнения 4 мы имеем равенство $\cos\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle A}{2} = \frac{1}{2}$, которое после преобразований приводится к виду $\cos\angle B + \cos\angle C = \cos\angle A + 1$.

Также заметим, что четырехугольник BH_cH_bC описан около окружности, а также вписан в окружность с диаметром BC. Вспомним известный факт (задача М1154, см. «Задачник «Кванта» №3 за 1989 г.): во вписанно-описанном четырехугольнике точки пересечения диагоналей, центры вписанной и описанной окружностей лежат на одной прямой. Таким образом, точки H, I, M_a лежат на одной прямой.

Задача 4 (П.Кожевников, Всероссийская олимпиада, 2003 г.). *В треугольнике ABC через O, I обозначены центры описанной и вписанной окружностей соответственно. Вневписанная окружность ω_a касается продолжений сторон AB и AC в точках K и M соответственно, а стороны BC – в точке S_a. Известно, что середина P отрезка KM лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки O, S_a и I лежат на одной прямой.*

Решение. Пусть I_a – центр окружности ω_a. Треугольник AKM – равнобедренный, поэтому середина P его основания KM лежит на биссектрисе угла A, а значит, на отрезке II_a. С другой стороны, P – это точка пересечения отрезка, соединяющего центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, с описанной окружностью этого треугольника, т.е. P – середина дуги BC, значит, по теореме о трилистнике $BP = IP = I_aP$ (рис.5).

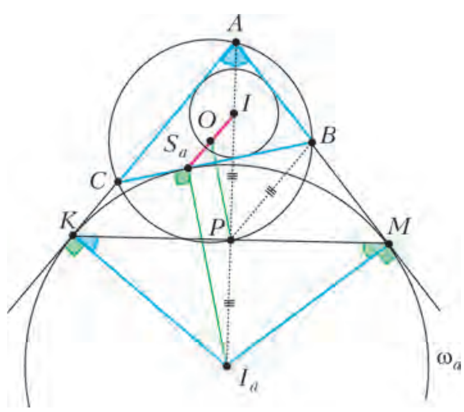


Рис. 5

Пусть R – радиус описанной окружности треугольника ABC, r_a – радиус окружности ω_a, $\angle A = 2\alpha$. Из прямоугольного треугольника KPI_a находим, что $PI_a = KI_a\sin\angle PKI_a = r_a\sin\alpha$. С другой стороны, $PI_a = PB = 2R\sin\alpha$, значит, $r_a = 2R$. Заметим, что $OP \parallel I_aS_a$ (оба этих отрезка перпендикулярны BC) и $OP = R = r_a/2 = I_aS_a/2$. Следовательно, OP – средняя линия треугольника S_aII_a, т.е. точки O, S_a и I лежат на одной прямой.

Соберем все обнаруженные факты в одно утверждение.

Утверждение 2. *Следующие условия для неравнобедренного треугольника ABC равносильны (опять-таки убедитесь в равносильности!) (рис.6):*

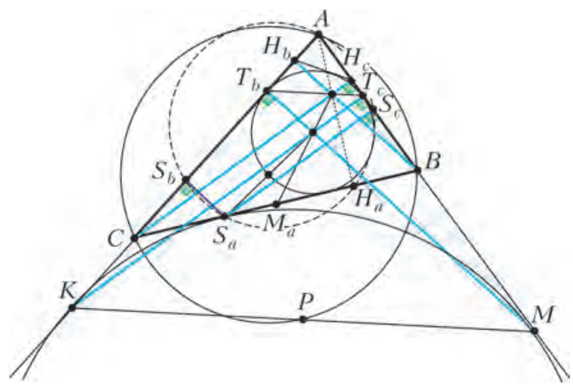


Рис. 6

- *вневписанная окружность ω_a перпендикулярна описанной окружности;*
- *$r_a = 2R$;*
- *$\cos\angle B + \cos\angle C = \cos\angle A + 1$;*
- *ортоцентр H лежит на прямой T_bT_c;*
- *вписанная окружность касается прямой H_bH_c;*
- *прямая IH делит сторону BC пополам;*
- *прямая OI проходит через S_a;*
- *точка H_a лежит на окружности $S_aS_bS_b$;*
- *середина отрезка, соединяющего точки касания ω_a с прямыми AB и AC, лежит на описанной окружности.*

В заключение исследуем пересечение рассмотренных классов треугольников. Очевидно, что из равенств $\cos\angle C = \cos\angle A + \cos\angle B$ и $\cos\angle B + \cos\angle C = \cos\angle A + 1$ следует $\cos\angle B = \cos\angle C - \cos\angle A = 1/2$, что позволяет найти углы треугольника. Оформим этот результат в виде задачи.

Задача 5. *Одна из вневписанных окружностей треугольника равна описанной, а другая пересекает ее под прямым углом. Найдите угол между соответствующими сторонами треугольника.*

Ответ: $60°$. (Два других угла равны $60° \pm \arcsin\frac{1}{2\sqrt{3}}$.)

Используя утверждения 1 и 2, можно эту же задачу сформулировать по-другому.

Задача 6 (М2405). *Прямая, соединяющая центры описанной и вписанной окружностей треугольника, пересекает одну из его сторон в основании высоты, а другую – в точке ее касания с соответствующей вневписанной окружностью. Найдите угол между этими сторонами.*

Интересно, можно ли решить эту задачу, не зная, откуда она взялась?..

Автор благодарен П.Кожевникову и Л.Емельянову за замечания и дополнения.

Еще одно доказательство теоремы об изогональном сопряжении

В.ДУБРОВСКИЙ

В дополнение к статье П.Кожевникова «Изогонально сопряженные точки» («Квант» №1 за 2016 г.) приведем еще одно замечательное доказательство теоремы об изогональном сопряжении. Это доказательство не похоже ни на одно из приведенных в статье – оно использует композицию преобразований плоскости (поэтому это доказательство можно назвать «теоретико-групповым»).

Для доказательства нам понадобится лемма.

Лемма. *Если среди трех прямых l, m, n есть пересекающиеся, то все они пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда композиция трех симметрий относительно этих прямых имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Доказательство. Одна часть утверждения очевидна: если прямые имеют общую точку, то эта точка неподвижна относительно всех трех симметрий.

Докажем обратное утверждение. В дальнейшем условимся обозначать симметрию относительно прямой p той же буквой p. Пусть композиция симметрий $n \circ m \circ l$ имеет неподвижную точку A (напомним, что преобразования в композиции выполняются справа налево – симметрия относительно l первой, относительно n – последней). Среди осей этих симметрий есть пересекающиеся, поэтому ось m пересекается или с l, или с n. Допустим сначала, что m пересекается с l в некоторой точке O. Обозначим через L и M образы точки A при последовательных симметриях относительно l и m: $L = l(A)$, $M = m(L)$, тогда $n(M) = A$ (рис.1). Поскольку точки A и M равноудалены от точки O, ось n должна проходить через O.

Если изначально известно, что пересекаются прямые m и n, то рассмотрим композицию $l \circ m \circ n$. Это преобразование является обратным к $n \circ m \circ l$ (проверьте!) и потому тоже имеет неподвижную точку, а отсюда, как и в первом случае, следует, что все три прямые имеют общую точку. Лемма доказана.

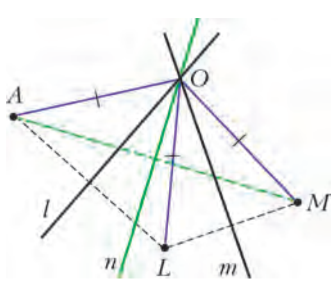


Рис. 1

Обратимся к теореме.

Теорема. *Пусть дан треугольник ABC и точка P. Через a, b, c обозначим прямые BC, CA, AB, через a_1, b_1, c_1 – прямые AP, BP, CP и через a_2, b_2, c_2 – прямые, симметричные прямым a_1, b_1, c_1 относительно соответствующих биссектрис (рис.2). Теорема утверждает, что прямые a_2, b_2, c_2 пересекаются в одной точке или параллельны. (Совпадающие прямые мы считаем параллельными.)*

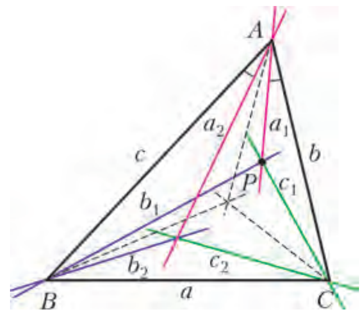


Рис. 2

Доказательство. Допустим, что среди прямых a_2, b_2, c_2 есть пересекающиеся (в противном случае доказывать нечего). Тогда, в силу леммы, достаточно доказать, что композиция $a_2 \circ b_2 \circ c_2$ имеет неподвижную точку.

По условию, $\angle(b, a_1) = \angle(a_2, c)$ (см. рис. 2). Композиция двух симметрий с пересекающимися осями – это поворот вокруг точки пересечения осей на удвоенный угол между осями (рис.3). Поэтому композиции симметрий $b \circ a_1$ и $a_2 \circ c$ – одно и то же преобразование (поворот на угол величиной $2\angle(a_1, b) = 2\angle(c, a_2)$ вокруг A). Аналогично доказываются равенства $c \circ b_1 = b_2 \circ a$ и $a \circ c_1 = c_2 b$. Пользуясь этими равенствами и полагая $f_1 = a_1 \circ b_1 \circ c_1$, $f_2 = a_2 \circ b_2 \circ c_2$, получим

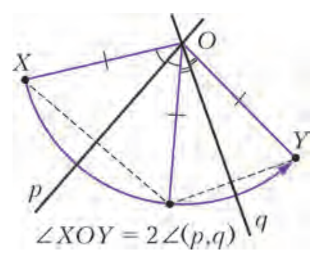


Рис. 3

$$b \circ f_1 \circ b = b \circ a_1 \circ c_1 \circ b = a_2 \circ c \circ b_1 \circ c_1 \circ b =$$
$$= a_2 \circ b_2 \circ a \circ c_1 \circ b = a_2 \circ b_2 \circ c_2 \circ b \circ b = a_2 \circ b_2 \circ c_2 = f_2,$$

откуда $f_2(b(P)) = (b \circ f_1)(P) = b(P)$, так как $f_1(P) = P$. Следовательно, f_2 оставляет на месте точку $b(P)$, что и требовалось доказать.

Использованную нами лемму можно уточнить.

Упражнение. Докажите, что если композиция f трех осевых симметрий имеет хотя бы одну неподвижную точку, то она является осевой симметрией (и, тем самым, имеет бесконечно много неподвижных точек), причем это условие выполняется тогда и только тогда, когда оси симметрий проходят через одну точку или попарно параллельны (в частности, совпадают). В остальных случаях f является *скользящей симметрией*, т.е. композицией осевой симметрии и параллельного переноса на ненулевой вектор, параллельный ее оси.

Уравнения связей в механике

К.РЫБ

Традиционный подход к решению задач механики предполагает использование формул кинематики, уравнений динамики, законов сохранения. При этом возможны ситуации, когда эти уравнения составляют систему, не дающую однозначного решения проблемы. Нужны дополнительные уравнения, учитывающие ограничения и связи, налагаемые на движение. Ограничения могут быть связаны с жесткостью тела, нерастяжимостью нити, движением по поверхности, наличием особых точек траектории. Выразить эти ограничения специальным уравнением, которое называют уравнением связи, – задача, требующая дополнительного внимания и опыта. Такие уравнения конкретизируют ситуацию и позволяют получить однозначный ответ.

Рассмотрим конкретные задачи, решение которых требует составления уравнений связей.

Задача 1. *Стержень длиной l одним концом опирается о вертикальную стену, а другим – о горизонтальную поверхность пола (рис.1). Нижний конец стержня движется горизонтально со скоростью v_0. Для момента, когда стержень образует с горизонтом угол α, найдите точку стержня, движущуюся относительно пола с минимальной скоростью. Чему равна эта скорость?*

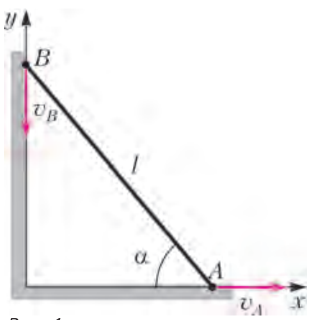


Рис. 1

Решение. Стержень жесткий, значит, расстояние между его концами неизменно. Проекции скоростей концов стержня на направление стержня разными быть не могут (условие жесткости), поэтому

$$v_A \cos\alpha = v_B \sin\alpha .$$

Движение стержня можно представить суммой поступательного движения и вращательного движения относительно мгновенного центра вращения, который удален от конца A стержня на расстояние x. Тогда для проекций скоростей концов стержня на направление, перпендикулярное стержню, можно записать

$$v_A \sin\alpha = \omega x_C , \quad v_B \cos\alpha = \omega(l - x_C) ,$$

где x_C – удаленность мгновенного центра вращения C от конца A, ω – угловая скорость вращения стержня. Причем этот центр будет иметь только скорость поступательного движения, равную

$$v_x = v_A \cos\alpha .$$

И эта скорость будет минимальной.

Из записанных уравнений следует

$$\frac{v_A}{v_B}\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_C}{l - x_C} , \text{ откуда } x_C = l\sin^2\alpha .$$

Скорость этой точки C минимальна и равна

$$v_{\min} = v_0 \cos\alpha .$$

Задача 2. *По гладкому горизонтальному столу свободно скользит однородная прямая палочка длиной l. В некоторый момент скорость ее конца A равна v_A и образует прямой угол с палочкой, а скорость конца B равна $2v_A$. За какое время палочка сделает полный оборот? На сколько сместится ее центр при этом?*

Решение. Скорость точки B также перпендикулярна палочке (условие жесткости стержня), но для нее возможны два направления. Представим движение палочки суперпозицией поступательного движения ее центра C и вращательного движения относительно этого центра и рассмотрим оба случая.

1) Пусть скорости точек A и B сонаправлены. Тогда получаем

$$v_A = v_C - \omega\frac{l}{2} ,$$
$$v_B = v_C + \omega\frac{l}{2} ,$$
$$v_B = 2v_A .$$

Отсюда находим угловую скорость вращения палочки: $\omega = \frac{v_A}{l}$ и время полного оборота:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi l}{v_A} .$$

Смещение центра палочки за это время равно

$$s_C = v_C T = 3\pi l .$$

2) Пусть теперь направления скоростей концов палочки противоположны. В этом случае для соотношения скоростей можно записать

$$v_A = v_C - \omega\frac{l}{2} ,$$
$$v_B = v_C + \omega\frac{l}{2} ,$$
$$v_B = -2v_A .$$

Отсюда для угловой скорости, периода вращения и смещения центра палочки получим

$$\omega = -\frac{3v_A}{l} , \quad T = \frac{2\pi l}{3v_A} \quad \text{и} \quad s_C = \frac{\pi l}{3} .$$

Задача 3. *Гантелька длиной l стоит в углу, образованном гладкими плоскостями. При малом смещении нижнего шарика A гантелька начинает двигаться. Найдите скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик B оторвется от вертикальной плоскости.*

Решение. Скорости шариков гантельки связаны условием ее жесткости: проекции их скоростей на направление l разными быть не могут. Пусть α – угол, образованный осью l с вертикалью. Тогда

$$v_B \cos\alpha = v_A \sin\alpha .$$

При скольжении гантельки ее центр масс понижается, и убыль потенциальной энергии идет на прирост кинетической энергии шариков, поскольку стенки гладкие:

$$\frac{mv_B^2}{2}+\frac{mv_A^2}{2}=mgl\left(1-\cos\alpha\right).$$

Сила реакции вертикальной стенки увеличивает скорость нижнего шарика до момента отрыва, когда эта сила становится равной нулю. Таким образом, в момент отрыва v_A максимальна. Из энергетического соотношения получаем

$$v_B^2+v_A^2=2gl\left(1-\cos\alpha\right),$$

или, с учетом условия жесткости,

$$v_A^2=2gl\left(\cos^2\alpha-\cos^3\alpha\right).$$

Экстремальное значение выражения в скобках определяет максимум скорости v_A, т.е. скорость в момент отрыва. Приравнивая производную этого выражения к нулю, находим $\cos\alpha_{\text{отр}}=\frac{2}{3}$. Тогда

$$v_{A\max}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gl}.$$

Задача 4. *Жесткие стержни длиной L_1 и L_2 соединены шарнирно в точке A (рис.2). Их свободные концы B и C разъезжаются со скоростями v_1 и v_2, направленными вдоль одной прямой. Найдите ускорение точки A в тот момент, когда стержни образуют прямой угол. Движение стержней происходит в одной плоскости.*

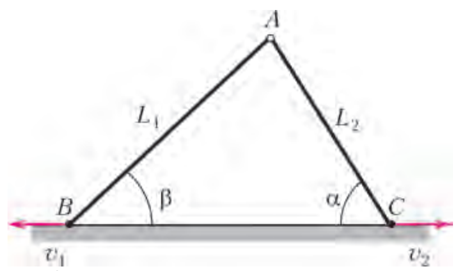


Рис. 2

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с точкой B. В этой системе скорость точки C равна v_1+v_2, а ее проекция на направление стержня длиной L_2 составляет $(v_1+v_2)\cos\alpha$, где $\cos\alpha=\frac{L_2}{\sqrt{L_1^2+L_2^2}}$. Из условия жесткости стержня проекции скоростей точек B и C на направление стержня L_2 одинаковы. Тогда составляющая ускорения точки A вдоль направления L_1, т.е. ее центростремительное ускорение, будет

$$a_1=\frac{\left(v_1+v_2\right)^2\cos^2\alpha}{L_1}.$$

Перейдем теперь в систему отсчета, связанную с точкой C. В этой системе проекции скоростей точек B и A на направление стержня L_1 равны $\left(v_1+v_2\right)\sin\alpha$, так как угол BAC по условию прямой. Это определит вторую составляющую ускорения точки A – вдоль направления L_2:

$$a_2=\frac{\left(v_1+v_2\right)^2\sin^2\alpha}{L_2}.$$

Составляющие ускорения во всех инерциальных системах отсчета одинаковы и взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль искомого полного ускорения равен

$$a_0=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\left(v_1+v_2\right)^2\sqrt{\frac{\cos^4\alpha}{L_1^2}+\frac{\sin^4\alpha}{L_2^2}}.$$

С учетом выражений для тригонометрических функций окончательно получим

$$a_0=\frac{\left(v_1+v_2\right)^2\sqrt{L_1^6+L_2^6}}{\left(L_1^2+L_2^2\right)L_1L_2}.$$

Задача 5. *Шток A выдавливает клин B под действием собственного веса (рис.3). Соприкасающиеся поверхности гладкие. Клин образует с горизонтальной поверхностью угол α, а отношение его массы к массе штока равно η. Найдите ускорения штока и клина.*

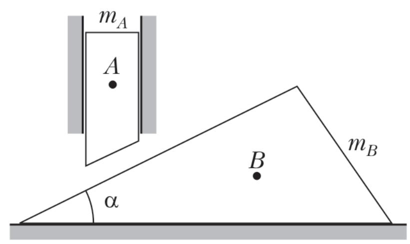


Рис. 3

Решение. Шток и клин взаимодействуют с силами, равными по модулю и противоположными по направлению: $\vec N_A=-\vec N_B$. Причем обе эти силы перпендикулярны соответствующей поверхности клина.

Запишем уравнения динамики для штока в проекциях на вертикальную ось и для клина в проекциях на горизонтальную ось:

$$m_Ag-N_A\cos\alpha=m_Aa_A,\quad N_B\sin\alpha=m_Ba_B,$$

или

$$N_A=\frac{m_A\left(g-a_A\right)}{\cos\alpha},\quad N_B=\frac{m_Ba_B}{\sin\alpha}.$$

Учитывая равенство модулей сил взаимодействия, а также соотношение масс, получим

$$\frac{\eta a_B}{g-a_A}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Соотношение между перемещениями штока и клина определяет связь между их ускорениями:

$$\frac{s_A}{s_B}=\frac{a_A}{a_B}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Последние два равенства образует систему с искомыми неизвестными. Из нее получим

$$a_A=g\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\eta},\quad a_B=g\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\eta}.$$

Задача 6. *Стержень, шарнирно закрепленный в точке O на горизонтальной плоскости, лежит на цилиндре (рис.4). В результате прокатывания цилиндра по плоскости без проскальзывания стержень поворачивается с угловой скоростью $\omega_{\text{ст}}$. Найдите зависимость угловой*

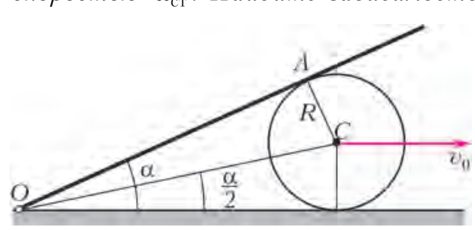


Рис. 4

скорости цилиндра ω_0 *от угла* α *между стержнем и плоскостью.*

Решение. Соединим ось цилиндра *C* с шарниром *O*. Пусть *OC* = *L*. Отметим, что

$$\frac{R}{L} = \sin\frac{\alpha}{2},$$

где *R* – радиус цилиндра. Угловая скорость стержня *OA* в два раза больше угловой скорости радиуса-вектора $\overline{OC}$:

$$\omega_{\text{р}} = \frac{\omega_{\text{ст}}}{2}.$$

При отсутствии проскальзывания цилиндра по плоскости линейная скорость его оси равна $v_0 = \omega_0 R$. Проекция линейной скорости оси на направление, перпендикулярное стержню, и линейная скорость конца радиуса-вектора одинаковы. Отсюда получаем уравнение связи:

$$\frac{1}{2}\omega_{\text{ст}} L = v_0 \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\omega_{\text{ст}} \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \omega_0 R \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Это и дает искомую зависимость:

$$\omega_0 = \frac{\omega_{\text{ст}}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 7. *Беспечный заяц бежал по тропинке с постоянной по величине и направлению скоростью* $\vec{v}$. *Лиса сидела в засаде, сбоку от тропинки. Когда заяц оказался на ближайшем от лисы расстоянии L, она пустилась в погоню со скоростью u (u > v), держа курс все время на зайца (рис.5). За какое время лиса догонит зайца?*

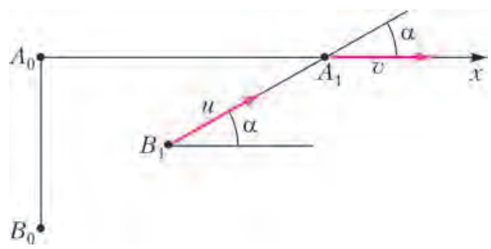


Рис. 5

Решение. Пусть в некоторый момент времени лиса окажется в точке B_i, а заяц – в точке A_i. Через малый промежуток времени Δt дистанция «лиса–заяц» сократится на $\Delta d = (u - v\cos\alpha_i)\Delta t$, а проекция перемещения лисы на направление оси *x*, т.е. вдоль тропинки, будет равна $\Delta x = u\cos\alpha_i \cdot \Delta t$. При суммировании по всему времени движения учтем, что общее сокращение дистанции «лиса–заяц» равно $\sum_i \Delta d_i = L$, а сумма проекций перемещения на ось *x* равна дистанции, которую пробежал заяц за все время преследования τ_0. Тогда при суммировании получим

$$L = u\tau_0 - v\sum_i \cos\alpha_i \cdot \Delta t_i,$$

$$u\sum_i \cos\alpha_i \cdot \Delta t_i = v\tau_0.$$

Отсюда находим искомое время:

$$\tau_0 = \frac{Lu}{u^2 - v^2}.$$

Задача 8. *На наклонной плоскости, составляющей угол* $\alpha = 30°$ *с горизонтом, покоится монета. Коэффициент трения монеты о плоскость* $\mu = \sqrt{3}/3$. *Монете сообщили начальную скорость* v_0 *так, что вектор начальной скорости параллелен наклонной плоскости и наклонен под углом* $\beta = 30°$ *вниз от горизонтали (рис.6).*

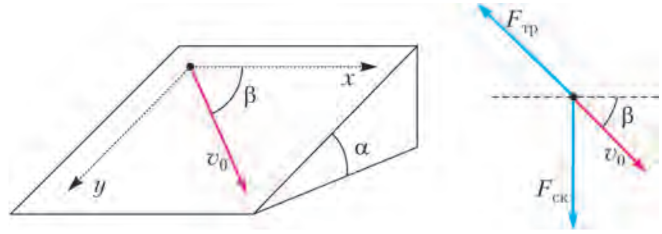


Рис. 6

Спустя достаточно большое время монета приобрела скорость v = 3 см/с. Найдите начальную скорость v_0.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на монету. Сила тяжести и сила реакции опоры в сумме дают «скатывающую» силу, направленную вниз по наклонной плоскости и равную $F_{\text{ск}} = mg\sin\alpha$. Сила трения направлена против скорости, равна $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$ и образует угол φ с горизонталью, причем φ меняется от $\beta = 30°$ до $90°$. Для установившегося движения эти силы противоположны и компенсируют друг друга. В самом деле, если $F_{\text{ск}} = F_{\text{тр}} = F$, или $mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$, то $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ – что соответствует условию.

Пусть в произвольный момент мгновенная скорость образует угол φ с горизонтом. Направим координатную ось *x* по направлению мгновенной скорости, а ось *y* – по направлению скатывающей силы и определим проекции ускорений на эти оси, учитывая, что силы равны по модулю:

$$a_x = \frac{-F(1-\cos\varphi)}{m}, \quad a_y = \frac{F(1-\cos\varphi)}{m}, \quad a_y = -a_x.$$

Проекции ускорения для каждого момента времени одинаковы по значению, т.е. разгоняющее ускорение вдоль оси *y* равно тормозящему ускорению вдоль оси *x* для любого момента времени. Это и есть уравнение связи. Тогда для конечного временно́го отрезка одинаковыми будут и общие изменения проекций скоростей Δv_y и $-\Delta v_x$:

$$\Delta v_y = v - v_0\cos\beta, \quad -\Delta v_x = v_0 - v, \quad v - v_0\cos\beta = v_0 - v.$$

Отсюда находим искомую начальную скорость:

$$v_0 = \frac{2v}{1+\cos\beta} = 3{,}2 \text{ см/с}.$$

Задача 9. *На гладкий горизонтальный стержень надели две одинаковые шайбы массой M каждая и связали их легкой нерастяжимой нитью длиной 2L. К середине нити привязали груз массой 2M. Груз отпускают, и система без рывка приходит в движение (рис.7). Каково максимальное значение скоростей шайб и груза в процессе движения? Вначале нить не провисала.*

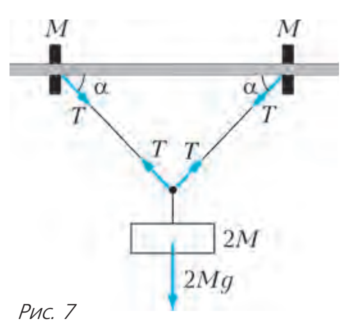


Рис. 7

Решение. Шайбы массой M движутся горизонтально с мгновенным ускорением $a_г$, а груз массой $2M$ движется вертикально с ускорением $a_в$. Нить нерастяжима, поэтому проекции ускорений шайбы и груза на направление нити одинаковы: $a_г \cos\alpha = a_в \sin\alpha$. Тогда для проекций скоростей выполняется равенство $v_г = v_в \operatorname{tg}\alpha$. Из уравнений динамики для шайбы и груза:

$$T\cos\alpha = Ma_г,$$

$$2Mg - 2T\sin\alpha = 2Ma_в,$$

где T – сила натяжения нити, получим

$$a_в = g - a_г \operatorname{tg}\alpha.$$

Пусть груз сместился по вертикали на Δx. По закону сохранения энергии,

$$2\frac{Mv_г^2}{2} + \frac{2Mv_в^2}{2} = 2Mg\Delta x.$$

Отсюда, с учетом связи между скоростями, получаем

$$v_в^2 = 2g\cos^2\alpha\cdot\Delta x,\quad v_г^2\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) = 2g\Delta x.$$

При $\Delta x = L$ $v_{г\max} = \sqrt{2gL}$, следовательно, скорость груза в нижнем положении равна нулю: $v_в = 0$.

Для нахождения максимума скорости груза $v_в$ воспользуемся тем, что $\Delta x = L\sin\alpha$. Тогда $v_в^2 = 2gL\cos^2\alpha\sin\alpha$. Чтобы найти экстремум этой функции, продифференцируем ее и производную приравниваем к нулю:

$$\left(\cos^2\alpha\sin\alpha\right)' = -2\cos\alpha\sin^2\alpha + \cos^3\alpha = 0.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg}^2\alpha_{экс} = \frac{1}{2},\quad \sin\alpha_{экс} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\alpha_{экс} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$v_{в\max} = \sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}}gL},\quad v_{г\max} = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}gL}.$$

Задача 10. *Из точки, находящейся над вершиной полусферы радиусом R, бросают горизонтально шарик (рис.8). Какую минимальную скорость он может иметь при приземлении?*

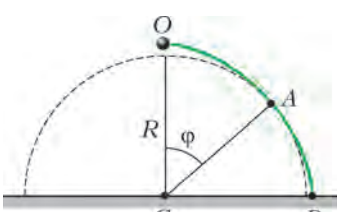


Рис. 8

Решение. Траектория шарика – это ветвь параболы, которая может иметь с полусферой одну точку касания A. Радиус, проведенный в точку касания, образует с вертикалью угол φ. Для последующего анализа искомой скорости попробуем выразить ее функцией одной переменной, например угла φ.

Пусть скорость в точке касания v_A, а время движения от вершины до этой точки τ_1. Для горизонтальной оси проекция скорости неизменна, а по вертикали она меняется с ускорением g. Тогда

$$R\sin\varphi = v_A\cos\varphi\cdot\tau_1,$$
$$v_A\sin\varphi = g\tau_1,$$

откуда находим

$$\tau_1 = \frac{R\sin\varphi}{v_A\cos\varphi},\quad v_A^2 = \frac{gR}{\cos\varphi}.$$

Для двух состояний шарика запишем закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgR\cos\varphi.$$

С учетом выражения для v_A^2 получим

$$v_B^2 = 2gR\left(\cos\varphi + \frac{1}{2\cos\varphi}\right).$$

Мы выразили искомую скорость как функцию одной переменной φ. Это и есть уравнение связи, отвечающее условиям задачи. Экстремальное значение выражения в скобках определит искомую минимальную скорость. На основе неравенства Буняковского–Коши,

$$\cos\varphi + \frac{1}{2\cos\varphi} \ge 2\sqrt{\frac{\cos\varphi}{2\cos\varphi}},$$

причем равенство определяет минимальное значение:

$$\left(\cos\varphi + \frac{1}{2\cos\varphi}\right)_{\min} = \sqrt{2}.$$

Тогда минимальная скорость тела при приземлении равна

$$v_{B\min} = \sqrt{2\sqrt{2}gR}.$$

Упражнения

1. Из четырех одинаковых тонких стержней длиной L каждой сделали ромб, скрепив шарнирно их концы. Шарнир A закреплен, а противоположный шарнир C двигают вдоль диагонали ромба с постоянным ускорением a (рис.9). Вначале вершины A и C располагаются близко друг к другу, а скорость точки C равна нулю. Какое ускорение будет иметь шарнир B в тот момент, когда стержни AB и BC составят угол 2α? Считать движение всех точек плоским.

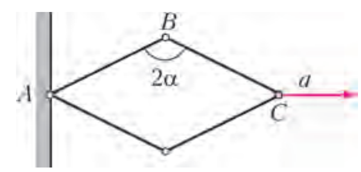


Рис. 9

2. На два катка разного радиуса положили тяжелую плиту. Она образует угол α с горизонтом. Найдите ускорение этой плиты. Проскальзывания нет. Массой катков пренебречь.

3. Бревно, упираясь нижним своим концом в угол между стеной и землей, касается края кузова грузовика на высоте H от земли. Грузовик отъезжает от стены со скоростью v, и бревно проскальзывает относительно края кузова. Как при этом меняется угловая скорость бревна в зависимости от угла между ним и горизонталью?

4. Цилиндр с намотанной на него нитью, второй конец которой закреплен, скатывается с гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис.10). Зная, что в момент, когда нить вертикальна, угловая скорость вращения цилиндра равна ω, найдите: а) скорость движения его оси; б) скорость точки его касания с наклонной плоскостью. Радиус цилиндра R.

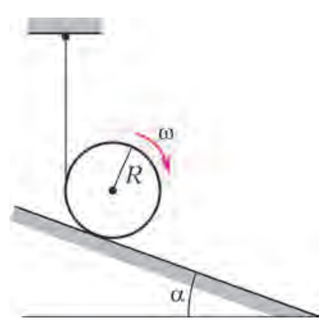


Рис. 10

XXXVII Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1 (3)[1]. По кругу стоят мальчики и девочки (есть и те, и другие), всего 20 детей. Известно, что у каждого мальчика сосед по часовой стрелке – ребенок в синей футболке, а у каждой девочки сосед против часовой стрелки – ребенок в красной футболке. Можно ли однозначно установить, сколько в круге мальчиков?

Е.Бакаев

2 (4). В остроугольном треугольнике ABC угол C равен $60°$. Пусть H – точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает прямые CA и CB в точках M и N соответственно. Докажите, что AN и BM параллельны (или совпадают).

Е.Бакаев

3 (5). Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?

Фольклор, предложил М.Евдокимов

4 (5). В квадрате 10×10 все клетки левого верхнего квадрата 5×5 закрашены черным цветом, а остальные клетки – белым. На какое наибольшее количество многоугольников можно разрезать (по границам клеток) этот квадрат так, чтобы в каждом многоугольнике черных клеток было в три раза меньше, чем белых? (Многоугольники не обязаны быть равными или даже равновеликими.)

Е.Бакаев

5 (5). На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нем красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами?

М.Евдокимов

10–11 классы

1 (4). Точку внутри выпуклого четырехугольника соединили со всеми вершинами и с четырьмя точками на сторонах (по одной на стороне). Четырехугольник оказался разделен на восемь треугольников с одинаковыми радиусами описанных окружностей. Докажите, что исходный четырехугольник – вписанный.

Е.Бакаев

2 (4). См. задачу 3 для 8–9 классов.

3 (4). См. задачу 4 для 8–9 классов.

4 (6). См. задачу М2421 «Задачника «Кванта».

5. На каждом из 12 ребер куба отметили его середину. Обязательно ли сфера проходит через все отмеченные точки, если известно, что она проходит:

а) (3) через какие-то 6 из отмеченных точек;

б) (3) через какие-то 7 из отмеченных точек?

М.Евдокимов

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до миллиона включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа.

А.Толпыго

2. Существуют ли такие целые числа a и b, что:

а) (2) уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $\left[x^2\right] + ax + b = 0$ имеет?

б) (3) уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $\left[x^2\right] + 2ax + b = 0$ имеет?

(Знаком $[k]$ обозначается целая часть числа k, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее k.)

А.Храбров

3 (6). Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырехугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$.

И.Богданов

4 (8). Художник-абстракционист взял деревянный куб $5 \times 5 \times 5$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трех цветов – черный, белый или красный – так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число черных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.)

М.Евдокимов

5 (8). Пусть p – простое число, большее 10^k. Взяли число, делящееся на p, и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k-значное число A. Получили число, делящееся на p. В него вставили k-значное число B – между двумя соседними цифрами числа A, – и результат снова оказался делящимся на p. Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр.

И.Богданов

6 (9). Робот-пылесос, имеющий форму круга, проехал по плоскому полу. Для каждой точки граничной окружности робота можно указать прямую, на которой эта точка оставалась в течение всего времени движения. Обязательно ли и центр робота оставался на некоторой прямой в течение всего времени движения?

И.Вайнштейн

7. а) (5) Есть $2n + 1$ батареек ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе – хорошие. За какое наименьшее число таких

[1] В скобках после номера задачи указано максимальное число баллов, присуждавшихся за ее решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.

попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

б) (5) Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причем хороших и плохих поровну.

А.Шаповалов

10–11 классы

1 (4). См. задачу 1 для 8–9 классов.

2 (5). См. задачу 3 для 8–9 классов.

3 (6). Пусть M – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки E и F так, что $AE \neq CF$ и $\angle FMC = \angle MEF = \alpha$. Найдите $\angle AEM$.

М.Прасолов

4 (8). См. задачу М2426 «Задачника «Кванта».

5 (8). На доске написано несколько приведенных многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. (Многочлен называется приведенным, если его старший коэффициент равен 1.) Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на любые два приведенных многочлена 37-й степени f_1 и g_1 такие, что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.

А.Кузнецов

6. Напомним, что палиндром – это слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево.

а) (4) Есть неограниченный набор карточек со словами «*abc*», «*bca*», «*cab*». Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Можно ли так составить палиндром?

(б) (6) Есть неограниченный набор красных карточек со словами «*abc*», «*bca*», «*cab*» и синих карточек со словами «*cba*», «*acb*», «*bac*». Из них по тем же правилам составили палиндром. Верно ли, что было использовано одинаковое количество красных и синих карточек?

А.Грибалко, И.Митрофанов

7. См. задачу М2428, а, б «Задачника «Кванта».

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. На доске написано произведение $\log_{\bigcirc}\square \cdot \ldots \cdot \log_{\bigcirc}\square$, всего 50 множителей. У Васи есть 100 карточек: $\boxed{2}, \ldots, \boxed{51}$ и $52, \ldots, 101$. Вася выкладывает круглые карточки на места кружочков и квадратные – на места квадратиков. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями, которые может получить Вася.

Г.Жуков

2. На плоскости зафиксированы луч с вершиной A и точка P вне прямой, содержащей этот луч. На луче выбирают переменную точку K, затем на продолжении AK за точку K отмечают точку N так, что $NK = 1$, а на прямой PK отмечают точку M (отличную от K) так, что $NM = 1$. Докажите, что все прямые NM, полученные таким образом, касаются одной окружности.

Е.Бакаев

3. См. задачу М2422,а «Задачника «Кванта».

4. На сборах теннисистов было 30 мастеров и 30 юниоров. Каждый мастер сыграл с одним мастером и пятнадцатью юниорами, а каждый юниор – с одним юниором и пятнадцатью мастерами. Докажите, что найдутся такие два мастера и два юниора, что эти мастера сыграли между собой, юниоры – между собой, каждый из двух мастеров – хотя бы с одним из двух юниоров, а каждый из двух юниоров – хотя бы с одним из двух мастеров.

А.Грибалко

5. В выпуклой шестиугольной пирамиде длины одиннадцати ребер равны 1. Чему может быть равна длина двенадцатого ребра?

М.Евдокимов

6. См. задачу М2427 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Л.Медников, А.Семенов

LXXIX Московская математическая олимпиада

8 класс

1. Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей (т.е. выражений вида $\frac{p}{q}$, где p и q – натуральные числа и $p < q$)?

И.Митрофанов

2. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Двое из них заявили: «Оба моих соседа – лжецы», а остальные восемь заявили: «Оба моих соседа – рыцари». Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

А.Меньщиков

3. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle ABC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Е.Бакаев

4. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только четные цифры.

Р.Женодаров

5. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны между собой. Известно, что угол A равен $120°$, угол C равен $135°$, а угол D равен $n°$. Найдите все возможные целые значения n.

Б.Обухов

6. Четное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с четным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно половину всех орехов.

А.Шаповалов

9 класс

1. Сумма трех положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

Б.Френкин

2. В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Е.Бакаев

3. Васе задали на дом уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, где p_1 и q_1 – целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал 4 квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба – любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

М.Евдокимов

4. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает отрезок BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.

Е.Бакаев

5. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

М.Евдокимов

6. В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно 3 языка, причем для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k. Оказалось, что $11n \le k \le \frac{m}{2}$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.

А.Райгородский

10 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Внутри выпуклого четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ нашлась такая точка C, что треугольники CA_1A_2 и CB_1B_2 правильные. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых A_2B_2 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

А.Заславский

3. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет 4 положительных корня с учетом кратности (т.е. сумма кратностей всех положительных корней этого уравнения равна 4). Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

М.Евдокимов

4. Бесконечную клетчатую доску раскрасили шахматным образом и в каждую белую клетку вписали по отличному от нуля целому числу. После этого для каждой черной клетки посчитали разность: произведение того, что написано в соседних по горизонтали клетках, минус произведение того, что написано в соседних по вертикали. Могут ли все такие разности равняться 1?

В.Клепцын

5. В куб с ребром 1 поместили 8 непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4?

М.Евдокимов

6. В однокруговом хоккейном турнире принимало участие 2016 команд. По регламенту турнира за победу дается 3 очка, за поражение 0 очков, а в случае ничьей играется дополнительное время, победитель которого получает 2 очка, а проигравший – 1 очко. По окончании турнира Остапу Бендеру сообщили количество очков, набранных каждой командой, на основании чего он сделал вывод, что не менее N матчей закончились дополнительным временем. Найдите наибольшее возможное значение N.

Л.Шабанов

11 класс (1-й день)

1. На шахматном турнире для 12 участников каждый сыграл ровно по одной партии с каждым из остальных. За выигрыш давали 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$, за проигрыш 0. Вася проиграл только одну партию, но занял последнее место, набрав меньше всех очков. Петя занял первое место, набрав больше всех очков. На сколько очков Вася отстал от Пети?

А.Галочкин

2. Существует ли такое значение x, что выполняется равенство $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1$?

Д.Горяшин

3. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.

М.Васильев

4. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n > 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый – своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что, для того чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного любым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

А.Клячко

5. Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя ее точками было: а) меньше $\frac{4}{5}$; б) меньше $\frac{4}{7}$? Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

О.Косухин

6. С левого берега реки на правый с помощью одной лодки переправились N туземцев, каждый раз плавая направо вдвоем, а обратно – в одиночку. Изначально каждый знал по одному анекдоту, каждый – свой. На берегах они анекдотов не рассказывали, но в лодке каждый рассказывал попутчику все известные ему на данный момент анекдоты. Для каждого натурального k найдите наименьшее возможное значение N, при котором могло случиться так, что в конце каждый туземец знал, кроме своего, еще не менее чем k анекдотов.

А.Шаповалов

11 класс (2-й день)

1. Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись квадрата которого оканчивается на 2016.

О.Косухин

2. Имеются чашечные весы, которые находятся в равновесии, если разность масс на их чашах не превосходит 1 г, а также гири массами $\ln 3$, $\ln 4, \ldots,$ $\ln 79$ г. Можно ли разложить все эти гири на чаши весов так, чтобы весы находились в равновесии?

И.Сергеев

3. Можно ли отметить k вершин правильного 14-угольника так, что любой четырехугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если:

а) $k = 6$; б) $k > 7$?

А.Бегунц, С.Гашков

4. За некоторое время мальчик проехал на велосипеде целое число раз по периметру квадратной школы в одном направлении с постоянной по величине скоростью 10 км/ч. В это же время по периметру школы прогуливался его папа со скоростью 5 км/ч, при этом он мог менять направление движения. Папа видел мальчика в те и только те моменты, когда они находились на одной стороне школы. Мог ли папа видеть мальчика больше половины указанного времени?

П.Бородин

5. Про приведенный многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_1x + a_0$ с действительными коэффициентами известно, что при некотором натуральном $m > 2$ многочлен $\underbrace{P(P(\ldots P}_{m\text{ раз}}(x)\ldots))$ имеет действительные корни, причем только положительные. Обязательно ли сам многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причем только положительные?

О.Косухин

Публикацию подготовили С.Дориченко, Е.Епифанов

Московская физическая олимпиада 2016 года

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. Горизонтальный канал соединяет две судоходные реки A и $Б$. Иногда в нем возникает слабое течение, которое может быть направлено либо в одну, либо в другую сторону. От одной реки к другой по каналу курсирует катер, скорость которого относительно воды постоянна. Капитан катера заметил, что за много лет ему никогда не удавалось совершить рейс туда и обратно быстрее чем за $t_1 = 2$ ч, а самый неудачный рейс длился $t_2 = 3$ ч (время разворота катера и остановок не учитывается). Однажды мотор катера сломался, но из-за стечения обстоятельств рейс от A к $Б$ и обратно все-таки был выполнен. Какое минимальное время для этого могло понадобиться катеру? После ремонта катер стал развивать в два раза большую скорость относительно воды. Как долго теперь может длиться рейс туда и обратно?

М.Замятнин

2. Семья Петровых ехала на машине из города в деревню. Весь путь занял у них 2,5 часа. Известно, что средняя скорость машины за первые 2 часа пути равна 60 км/ч, а средняя скорость за последние 2 часа пути равна 80 км/ч. Отец попросил сына, зная это, вычислить среднюю скорость машины на всем пути. Подумав, сын справедливо сказал, что для этого недостаточно данных, но можно вычислить наименьшее и наибольшее возможные значения средней скорости, зная, что семья никогда не нарушает правила дорожного движения, а машина едет только вперед. Согласно правилам, скорость машины везде на пути от города к деревне не должна превышать 90 км/ч. Найдите наименьшее и наибольшее возможные значения средней скорости машины Петровых.

М.Ромашка

3. В тексте одной из задач задачника Григория Остера «Ненаглядное пособие по математике» написано следующее: «В специальный ящик можно уложить 68 куриных яиц. Если уминать их ногами, то поместится в 100 раз больше». С точки зрения физики, это может показаться странным. Жидкости (в частности, белок и желток куриных яиц) трудно поддаются сжатию. Поэтому плотности белка и желтка практически невозможно изменить, уминая яйца ногами. То же самое справедливо и в отношении яичной скорлупы. Поэтому если яйца в ящике лежат вплотную друг к другу, то объем содержимого ящика нельзя изменить в такое большое число (100) раз. Однако, в задаче сказано, что ящик – специальный. Можно предположить, что в ящике были специальные перегородки, за счет которых яйца укладывались не вплотную, а на некотором расстоянии друг от друга, и большую часть объема ящика занимал воздух. Предположим, что эти перегородки были легкими и тонкими: масса и объем всех перегородок пренебрежимо малы по сравнению с массой и объемом всех яиц. Будем считать также, что при уминании яиц ногами белок и желток не выплескиваются из ящика. Известно, что средняя плотность одного куриного яйца равна 1060 кг/м^3. Зная это, ответьте на следующие вопросы.

1) Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика с 68 куриными яйцами?

2) Чему равна средняя плотность содержимого ящика, если в него положили только 40 яиц?

М.Ромашка

4. Вася взвесил на очень точных электронных весах (которые «чувствуют» изменение массы 0,01 г) два чистых белых листа бумаги формата А4 (плотность бумаги 80 г/м^2, размеры листа 297×210 мм). Массы листов были совершенно одинаковыми. На одном из листов на двух его сторонах Вася напечатал на принтере текст, в котором было 6500 символов. После взвешивания листа с текстом оказалось, что его масса увеличилась на 1,6%. Сколько в среднем весит один символ?

С.Варламов

8 класс

1. Две группы туристов одновременно вышли из турбазы в двух противоположных направлениях. Группы поддерживают между собой связь по рации, радиус действия которой R = 10 км. Первая группа, пройдя путь s_1 = 2 км по лесу, вышла из леса и увеличила свою скорость на Δv = = 1,5 км/ч, и спустя t_1 = 40 мин после этого связь по рации прервалась. Вторая группа после t_2 = 30 мин ходьбы уменьшила свою скорость в n = 1,2 раза, и, после того как она прошла еще s_2 = 3 км, связь по рации прервалась. Найдите скорость каждой группы сразу после выхода из турбазы. Туристы движутся все время по одной прямой, не меняя направления своего движения. Ответы дайте в численном виде, округлив до десятых долей км/ч.

М.Ромашка

2. Однородная линейка подвешена к потолку на нити, привязанной к середине линейки. К линейке прикреплены груз и однородная цепочка так, как показано на рисунке 1,*а*. При этом линейка горизонтальна и находится в равновесии. Затем груз полностью погрузили в воду так, что он не касался дна и стенок стакана. Для того чтобы сохранить равновесие системы, пришлось переместить точку прикрепления к линейке одного из концов цепочки на 1/4 длины линейки – как показано на рисунке 1,*б*. Какова средняя плотность материала, из которого сделан груз?

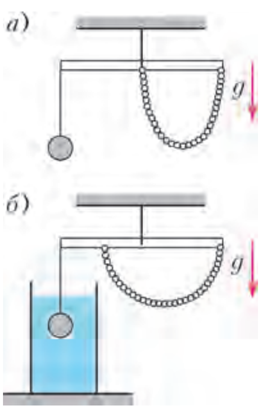


Рис. 1

С.Варламов

3. На кухне стоят две включенные (прогревшиеся) электроплитки мощностями 1 кВт и 2 кВт, а также есть один кипятильник мощностью 0,5 кВт (время его прогревания мало). Хозяйка заполняет водой три кастрюли, налив в них 1, 2 и 3 литра воды соответственно, и планирует как можно быстрее получить 6 литров кипятка. Начальная температура воды во всех кастрюлях одинакова и равна $20\ ^\circ\text{C}$. Удельная теплоемкость воды $4200\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C})$. Чему равно минимальное время, необходимое для получения кипятка? Опишите одну из возможных процедур манипуляций с кастрюлями, плитками и кипятильником, при которой это рекордное время достигается. Считайте, что все тепло передается только воде. Временами, которые хозяйка тратит на перестановку кастрюль и перемещение кипятильника, можно пренебречь.

С.Варламов

4. Два длинных куска проволоки изготовлены из разных металлов *А* и *В*. В первом опыте от проволоки из металла *А* отрезали кусок длиной l_1 и нагрели его, увеличив его температуру на Δt_1. При этом длина куска увеличилась на Δl_1. Во втором опыте от проволоки из металла *В* отрезали кусок длиной l_2 и нагрели его, увеличив его температуру на Δt_2, и длина этого куска увеличилась на Δl_2. В третьем опыте от проволоки из металла *А* отрезали кусок длиной *a*, а от проволоки из металла *В* отрезали кусок длиной *b* и соединили эти куски друг с другом последовательно. На сколько нужно нагреть получившийся составной кусок проволоки для того, чтобы его длина увеличилась на ΔL? Считайте, что для обоих металлов выполняется линейный закон теплового расширения, при котором относительное увеличение длины каждого куска проволоки пропорционально абсолютному увеличению его температуры.

М.Ромашка

9 класс

1. Группа из трех туристов должна перебраться из пункта *А* в пункт *В* по дороге длиной s = 45 км. Стартуют все туристы одновременно. На всю группу туристов есть только два велосипеда, причем если на велосипеде едут двое, то их скорость равна $3v$, а если на велосипеде едет один человек, то его скорость равна $4v$. Если же турист идет пешком, то его скорость движения равна v = 5 км/ч. За какое минимальное время все туристы могут оказаться в пункте назначения? Временем посадки туристов на велосипед, а также временами разгона и торможения можно пренебречь.

С.Варламов

2. С момента написания писателем Григорием Остером новелл про четверых друзей – Мартышку, Слоненка, Удава и Попугая – прошло уже почти 40 лет. За это время Слоненок вырос и превратился в Слона, Удав стал еще длиннее, Попугай состарился и сгорбился, а Мартышка служит теперь чучелом в зоологическом музее. На очередном собрании друзья вспомнили, как они измеряли длину удава, и решили тряхнуть стариной. Удав, лежа на горизонтальном полу, вычислил расстояние от пола до своего центра масс, и оказалось, что оно равно 10 см. Центр масс Слона оказался на высоте 2 м над полом. Центр масс Удава и Слона вместе взятых находился на высоте 1,7 м. Когда на голову слона на высоте 3,5 м над полом сел Попугай, центр масс всех троих оказался выше еще на 0,5 мм. Какова масса Удава в Попугаях, если высота Попугая намного меньше толщины Удава?

С.Варламов

3. Невесомая нерастяжимая нить перекинута через идеальный блок. К одному концу нити прикреплен груз массой m_2, а другой конец нити наматывается на невесомую катушку радиусом r, расположенную внутри ящика массой m_1 (рис.2). Катушка вращается электродвигателем с постоянной угловой скоростью ω. Участки нити, не прилегающие к блоку и катушке, в процессе движения вертикальны, система крепления катушки к ящику и электродвигатель очень легкие. Найдите модуль ускорения груза массой m_2.

А.Бычков

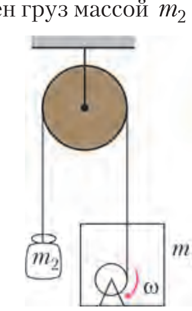


Рис. 2

4. В широком цилиндрическом калориметре (рис.3), частично заполненном льдом при температуре $t_0 = 0\ ^\circ\text{C}$, во льду имеется цилиндрическая полость радиусом R = 10 см,

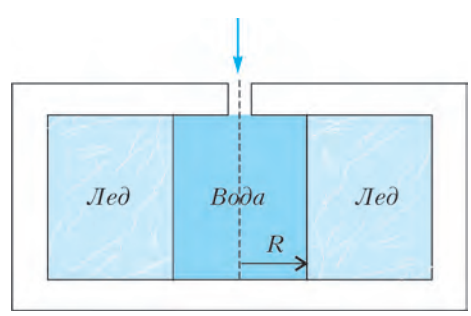


Рис. 3

которая сначала ничем не заполнена. В эту полость через небольшое отверстие сверху быстро залили воду, имевшую температуру $t = 10$ °С. Лед начал таять, и, поскольку плотность льда меньше плотности воды, уровень воды начал опускаться. Но через отверстие сверху сразу стали доливать воду так, чтобы полость в калориметре все время была полностью заполнена водой. Температура доливаемой воды также равна t. Воду внутри калориметра постоянно перемешивают так, чтобы лед во всех точках таял с одинаковой скоростью. В некоторый момент температура воды в калориметре опустилась до $t_0 = 0$ °С, и лед таять перестал. Найдите радиус полости, заполненной водой, в этот момент. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

М.Ромашка

10 класс

1. На горизонтальном полу стоит табуретка массой $M = 4{,}5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между ее ножками $d = 30$ см. Коэффициент трения между ножками и полом $\mu = 0{,}4$. Экспериментатор Глюк привязал к середине стороны сиденья табуретки невесомую нерастяжимую нить, перекинутую через блок (рис.4). На втором конце

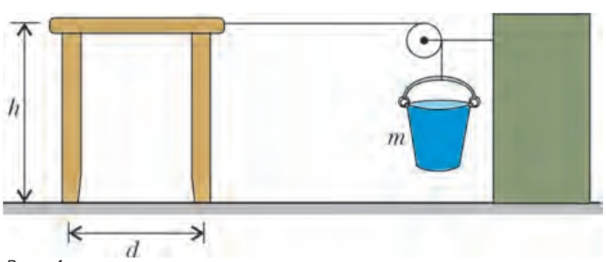


Рис. 4

нити висит ведерко с водой. Масса ведерка вместе с водой $m = 0{,}6$ кг. Экспериментатор Глюк опустил в ведерко тонкую трубку с внутренним диаметром $D = 4$ мм, по которой в ведерко стала доливаться вода с постоянной скоростью $v = 0{,}2$ м/с. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2. Через какое время после этого табуретка придет в движение? Как начнет двигаться табуретка: скользить, двигаясь поступательно, или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси?

М.Ромашка

2. По наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, едет с постоянной скоростью $v = 1$ м/с игрушечный автомобиль, масса которого $M = 300$ г (рис.5). Автомобиль связан легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, с грузом массой $m = 200$ г, который движется вертикально. Автомобиль приводится в движение электромотором, который питается от батарейки. При таком движении КПД электромотора $\eta = 60\%$. Найдите количество теплоты, выделяющееся при протекании тока через обмотки электромотора за время $t = 2{,}5$ с. Автомобиль движется без проскальзывания, трением в осях и сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.

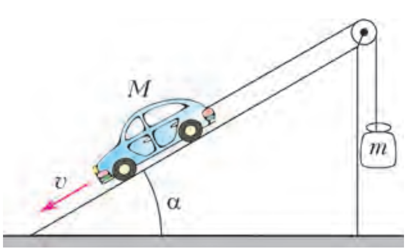


Рис. 5

М.Ромашка

3. Десятиклассник Вася проводит домашний эксперимент. Он наливает в кружку 200 мл воды (до краев) при температуре +20 °С. Затем он отпивает один маленький глоток (5 мл), тут же доливает в кружку кипяток до краев, аккуратно перемешивает содержимое очень легкой пластиковой ложечкой (не расплескивая содержимого) и повторяет описанную процедуру много раз. Максимальная температура воды, которую Вася еще может проглотить, не рискуя обжечься, равна +60 °С. Сколько воды выпьет Вася до конца своего эксперимента?

С.Варламов

4. В колбе объемом $V = 2$ л при комнатной температуре находится $\nu = 0{,}1$ моль гелия. Горлышко колбы (рис.6) имеет длину $l = 2$ см и сечение $S = 10$ см^2. Это горлышко закрыто цилиндрической пробкой массой $m = 10$ г, могущей скользить по нему без трения. В начальный момент пробка удерживается у основания горлышка, и гелий не выходит наружу. Пробку отпускают, и она вылетает из горлышка со скоростью $v = 10$ м/с. Найдите изменение температуры гелия в колбе к моменту вылета пробки из горлышка. Давление воздуха в комнате $p_0 = 1$ атм, теплообменом гелия в колбе с окружающими телами за время вылета пробки можно пренебречь.

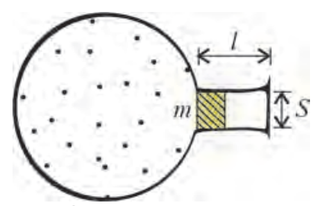


Рис. 6

А.Бычков

5. На закрепленные неподвижно клеммы A и B (рис.7), расстояние между которыми 40 см, может подаваться постоянное напряжение 0,3 В. К клеммам прикреплены две медные проволоки без изоляции, всюду имеющие круглое поперечное сечение. Одна из проволок натянута и имеет длину 40 см, а другая имеет длину 70 см. Диаметр обеих проволок 0,6 мм. Как сделать так, чтобы тепловая мощность, выделяющаяся в этой системе, была максимальной? Чему равна эта мощность? Проволоки можно приводить в электрический контакт друг с другом всеми возможными способами, но нельзя обрывать их и отсоединять концы проволок от клемм. Удельное сопротивление меди $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Рис. 7

М.Ромашка

11 класс

1. Школьник летом был в Крыму и с высоты $h = 4$ м над уровнем моря увидел на линии горизонта ракетный крейсер «Москва», который шел вдоль берега и был виден «во весь рост», от ватерлинии до верха надстроек. Школьник прикрыл один глаз, вытянул перед собой руку и большим пальцем, поднятым вверх, «закрыл» весь крейсер от носа до кормы корабля (для открытого глаза). Ширина пальца $a = 2$ см, расстояние от глаза до большого пальца при вытянутой руке $l = 70$ см. День был солнечным, поэтому диаметр зрачка открытого глаза был небольшим – всего 1 мм. Затем школьник через свой смартфон нашел справку о параметрах крейсера, где обнаружил, что длина корабля составляет $L = 186{,}5$ м. Каков радиус Земли, вычисленный школьником на основании всех имеющихся данных?

М.Семенов

2. На краю табуретки массой $M = 4{,}5$ кг сидит кошка массой $m = 1{,}5$ кг (рис.8). Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между ножками $d = 30$ см. Коэффициент трения между ножками и полом $\mu = 0{,}5$. Кошка прыгает с табуретки в направлении, показанном стрелкой. При этом ускорение центра масс кошки направлено горизонтально. При каком максимальном значении модуля этого ускорения табуретка будет оставаться неподвижной? Если модуль ускорения превысит это значение на очень малую величину, то как начнет двигаться табуретка: скользить по полу или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси? Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10\ \text{м/с}^2$.

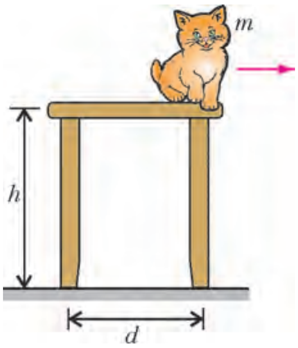


Рис. 8

М.Ромашка

3. См. задачу Ф2416 «Задачника «Кванта».

4. В бесконечную проволочную сетку, состоящую из шестиугольников с сопротивлениями каждого ребра r (рис.9,*а*),

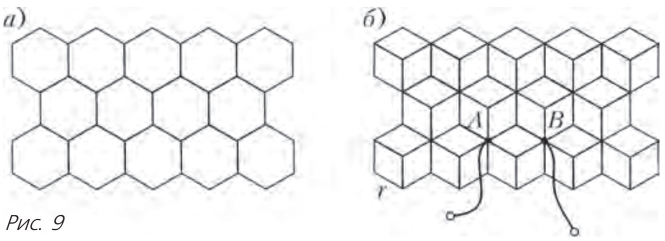


Рис. 9

добавили проводники с такими же сопротивлениями – так, как показано на рисунке 9,*б* (каждую шестиугольную ячейку разделили тремя отрезками проволоки сопротивлением r каждый на три одинаковых ромба). Найдите сопротивление между точками A и B.

А.Бычков

5. На рисунке 10 изображена механическая система, в которой через невесомый блок с прикрепленной к потолку горизонтальной осью перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены небольшие грузы массами m и $2m$. Груз массой $2m$ лежит на горизонтальной опоре, груз массой m висит. К грузу массой m через невесомую идеальную пружину с жесткостью k, расположенную вертикально и имеющую небольшую длину L_0, прикреплен второй такой же груз. В начальный момент пружина не деформирована и этот второй груз лежит на той же опоре, что и груз массой $2m$. Расстояние от верхнего груза до блока равно l_0. Свободные участки нити, не лежащие на шкиве блока, вертикальны. В момент времени $t = 0$ опора исчезает (ее быстро убирают вниз). Через время τ после этого один из грузов коснулся блока. Какой это груз? При каком значении l_0 время τ максимально? Чему равно это максимальное значение?

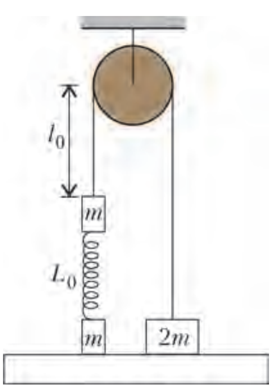


Рис. 10

С.Варламов

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. См. задачу Ф2420 «Задачника «Кванта».

2. Турист переходил узкий железнодорожный мост в направлении от точки A к точке B (рис.11). Находясь на

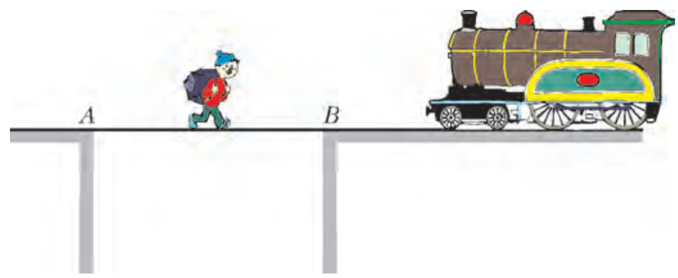


Рис. 11

расстоянии $d = 50$ м от середины моста, ближе к точке B, он увидел поезд, движущийся ему навстречу со скоростью $V = 54$ км/ч, который в этот момент находился на расстоянии $s = 300$ м от туриста. Турист побежал вперед, навстречу поезду, с постоянной скоростью $v = 5$ м/с и успел достигнуть точки B в момент, когда поезд находился на расстоянии $l = 60$ м от этой точки. Успел бы турист добежать до точки A, если бы он, увидев поезд, мгновенно развернулся и побежал с такой же скоростью назад? Если да, то на каком расстоянии от точки A находился бы поезд в этот момент? Если нет, то на каком расстоянии от точки A поезд мог бы догнать туриста? Скорость поезда постоянна.

М.Ромашка

3. В цилиндрический стакан до половины налили зеленую жидкость, которая не смешивается и никак не реагирует с водой, после чего отметили на стенке уровень жидкости. Затем в стакан опустили маленький кусочек льда (объем кусочка гораздо меньше объема жидкости). При этом уровень зеленой жидкости в стакане поднялся на величину x. После того как весь лед растаял, уровень зеленой жидкости над *начальной* отметкой составил y. Постройте график зависимости отношения y/x от плотности ρ зеленой жидкости.

А.Фролов

4. К правому концу A стержня, масса которого пренебрежимо мала, подвесили на тонкой нити алюминиевый шарик. Стержень положили на край сосуда с машинным маслом, как показано на рисунке 12, а к точке B, находящейся на расстоянии $l_1 = 50$ см слева от точки опоры O, подвесили груз массой $m_1 = 2{,}3$ кг. При этом шарик оказался погружен в масло на половину своего объема. Затем груз сняли, а стержень с шаром перенесли и положили на край сосуда с водой так, что точка опоры O осталась прежней. Груз какой массой m_2 надо подвесить к другому концу

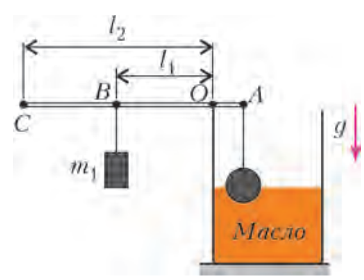


Рис. 12

стержня C, находящемуся на расстоянии $l_2 = 110$ см от точки O, чтобы алюминиевый шарик снова оказался погруженным на половину своего объема? Плотности алюминия, машинного масла и воды равны $\rho_а = 2700$ кг/м^3, $\rho_м = 800$ кг/м^3 и $\rho_в = 1000$ кг/м^3 соответственно. Перед погружением шарика в воду его тщательно протерли от масла.

Е.Якута

8 класс

1. Автомобиль часть пути ехал с постоянной скоростью v_1 по грунтовой дороге, а затем, выехав на хороший асфальт, поехал быстрее с другой постоянной скоростью v_2. На рисунке 13 приведен график зависимости средней скорости

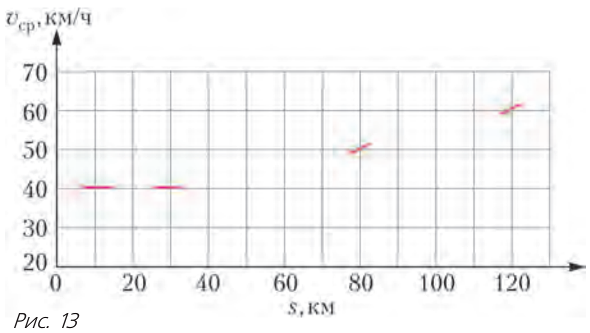


Рис. 13

$v_{ср}$ автомобиля от пройденного им пути s. К сожалению, большая часть графика от времени выцвела, и на нем остались лишь отдельные фрагменты. Определите значения скоростей v_1 и v_2. Сколько времени длилось движение по грунтовой дороге? Какого значения достигла средняя скорость автомобиля к сотому километру пути?

М.Замятнин

2. К правому концу A стержня, масса которого пренебрежимо мала, подвесили на тонкой нити алюминиевый шарик (см. рис.12). Стержень положили на край сосуда с водой, а к точке B, находящейся на расстоянии $l_1 = 50$ см слева от точки опоры O, подвесили груз такой массой m, что шарик оказался погруженным в воду на половину своего объема. На какую часть своего объема окажется погруженным в воду этот шарик, если груз перевесить из точки B в точку C, находящуюся на расстоянии $l_2 = 60$ см слева от точки O? Плотность алюминия $\rho_а = 2700$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Е.Якута

3. См. задачу Ф2422 «Задачника «Кванта».

4. Папа решил взять с собой Васю на зимнюю рыбалку. В инвентаре папы оказались два лишних свинцовых грузила с одинаковой массой. Первое представляло собой кубик, а второе – цилиндр, высота которого равна длине ребра кубика. К середине одной из граней кубика и к центру одного из оснований цилиндра были прикреплены маленькие крючки. В какой-то момент Васе стало скучно, и он начал экспериментировать с этими грузилами. Вася привязал к крючкам нитки, подвесил грузила за эти нитки и заклеил верхние и нижние поверхности грузил изоляционной лентой, которая плохо проводит тепло. После этого Вася нагрел на походной газовой горелке воду в миске, опустил в нее свинцовый кубик, дождался его полного прогревания до 80 °C и после этого погрузил кубик в прорубь. Оказалось, что кубик охладился до температуры 36,6 °C за 30 секунд. Затем Вася нагрел тем же способом до той же температуры цилиндрическое грузило и тоже погрузил его в прорубь. За какое время оно охладится до температуры 36,6 °C ?

Справка: объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

А.Бычков

9 класс

1. На планете системы звезды Шедар один из пунктов зарядки роботов-исполнителей обслуживает по одному роботу со скоростью 60 роботов в час (р/ч). В один из дней роботы приходили на пункт в течение 8 часов. Первый час они приходили со скоростью 70 р/ч. В течение второго часа скорость поступления роботов равномерно увеличивалась, составив к его концу 80 р/ч. Потом в течение третьего часа скорость поступления роботов равномерно уменьшалась и упала к его концу обратно до 70 р/ч. На четвертом часу скорость прихода роботов равномерно падала, составив к концу часа 20 р/ч и потом оставалась такой в течение пятого и шестого часов. На седьмом часу опять был равномерный подъем скорости поступления роботов – до 100 р/ч в конце часа, а на восьмом часу наблюдалось равномерное убывание скорости поступления до 60 р/ч. Роботы строго соблюдают очередность, а после зарядки сразу покидают пункт.

1) Сколько времени работал пункт в этот день, если были заряжены все роботы?

2) Какова наибольшая продолжительность пребывания робота на пункте зарядки (в очереди и на самой зарядке) в этот день?

А.Фролов

2. См. задачу Ф2423 «Задачника «Кванта».

3. Клин массой $M = 5$ кг с углом при основании $\alpha = 45°$ расположен на гладком горизонтальном столе (рис.14). На наклонной поверхности клина лежит брусок массой $m = 1$ кг. На брусок начинает действовать сила, направленная горизонтально в сторону клина. Модуль этой силы возрастает с течением времени t по закону $F = \delta t$, где коэффициент пропорциональности $\delta = 1$ Н/с. Коэффициент трения между клином и бруском $\mu = 1{,}2$. Найдите модуль силы трения, действующей со стороны клина на брусок через время $T = 12$ с после начала действия силы, если клин к этому моменту еще не начал опрокидываться. Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.

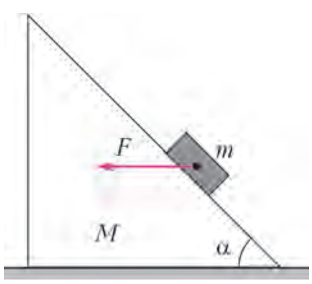


Рис. 14

А.Бычков

4. Алиса и Василиса играют в игру «Постоянный ток». Они соединили последовательно два реостата и идеальный амперметр и подключили полученную цепь к источнику напряжения. Амперметр показал ток $I_0 = 100$ мА. Школьницы «ходят» по очереди. Одна двигает ползунок своего реостата, и показания амперметра меняются. Другая должна тоже подвинуть ползунок своего реостата, как можно быстрее вернув ток к прежнему значению. После этого «ход» переходит к ней. Реостаты у девушек разные, но на каждом из них ползунок перемещается прямолинейно и в начале игры находится в среднем положении. У Алисы расстояние между крайними возможными положениями ползунка равно $L_A = 36$ см, а у Василисы – $L_B = 40$ см.

1) Первой «ходит» Алиса. Она сдвинула свой ползунок на 4 см вправо, и амперметр стал показывать ток $I_1 = 90$ мА.

Василиса сдвинула свой ползунок на 5 см влево, и ток вернулся к прежнему значению. Теперь «ходит» Василиса. Она двигает ползунок на 6 см влево. На сколько и в каком направлении должна сдвинуть ползунок Алиса, отвечая на «ход» Василисы?

2) Может ли в течение игры возникнуть ситуация, когда Алиса не сможет ответить на «ход» Василисы?

3) Может ли в течение игры возникнуть ситуация, когда Василиса не сможет ответить на «ход» Алисы?

4) Чему равно напряжение источника, если его внутреннее сопротивление $r = 4$ Ом?

М.Ромашка

10 класс

1. См. задачу Ф2413 «Задачника» «Кванта».

2. См. задачу 3 для 9 класса. Дополнительный вопрос: найдите ускорения клина и бруска через время $5T = 1$ мин после начала действия силы F.

3. См. задачу Ф2424 «Задачника «Кванта».

4. Две покоящиеся в космосе вдали от других тел материальные точки, имеющие одинаковые массы m и электрические заряды q, скреплены невесомой нерастяжимой и не проводящей электрический ток прочной гибкой нитью длиной L. Незаряженное тело малых размеров массой $2m$ движется поступательно в направлении средней точки нити со скоростью v, направленной перпендикулярно нити. При соприкосновении тела и нити они друг относительно друга не проскальзывают, но и не прилипают друг к другу. Какими будут модули скоростей материальных точек и тела через очень большое время? На каком минимальном расстоянии друг от друга будут находиться материальные точки в процессе движения?

С.Варламов

5. Участок AD электрической цепи, схема которого показана на рисунке 15, состоит из четырех постоянных резисторов с сопротивлениями $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 80$ Ом, $R_4 = 25$ Ом и одного переменного резистора $\widetilde{R}$, сопротивление которого может изменяться от нуля до

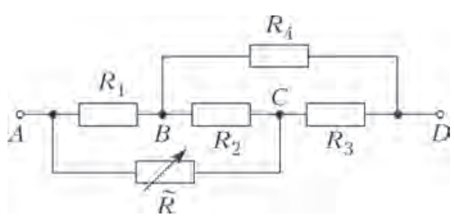


Рис. 15

$R_{max} = 10$ кОм. Сила тока, текущего через участок AD, поддерживается постоянной и равной $I = 1{,}2$ А. 1) При каких значениях сопротивления переменного резистора ток через резистор сопротивлением R_2 будет течь в направлении от точки B к точке C, а при каких – в обратном направлении? 2) При каком значении сопротивления переменного резистора напряжение на резисторе сопротивлением R_2 будет максимальным и чему равно это напряжение?

М.Ромашка

11 класс

1. Тонкий однородный жесткий стержень S скользит по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис.16). В начальный момент времени нижний конец стержня движется вниз вдоль наклонной плоскости (по линии L «падения воды», как указано красной стрелкой на рисунке), а верхний конец стержня движется горизонтально, причем модуль скорости верхнего конца в два раза больше, чем нижнего. По прошествии некоторого промежутка времени оказалось, что середина стержня сместилась на одинаковые расстояния по горизонтали и вдоль линии «падения воды». Во сколько раз изменился модуль скорости середины стержня за этот промежуток времени?

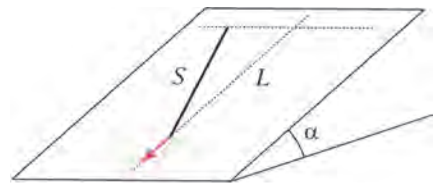


Рис. 16

К.Парфенов

2. Вдоль гладкой горизонтальной поверхности скользит шар неизвестной массы в направлении другого покоящегося шара массой 120 г. В некоторый момент времени происходит абсолютно упругое лобовое соударение этих шаров, в результате которого первый шар передает второму 64% своей кинетической энергии. Опыт повторяют, заменив движущийся шар шаром другой массы, но не изменив его начальной скорости. Оказалось, что в результате второго опыта доля переданной покоящемуся шару кинетической энергии не изменилась. Определите, на какую величину отличались массы движущихся шаров в двух опытах.

Е.Вишнякова

3. Две тепловые машины используют в качестве рабочего тела постоянное количество одноатомного идеального газа. Циклы, по которым работают эти машины, при изображении в координатах «давление–объем» при некотором выборе масштабов являются двумя половинами одной окружности: первая машина работает по циклу $ACBA$, а вторая – по циклу $ABDA$ (рис.17). Диаметр AB этой окружности лежит на прямой, проходящей через начало координат, и обладает тем свойством, что на участке ACB газ только получает тепло от нагревателя, а на участке BDA – только отдает тепло холодильнику. Центр окружности соответствует объему V_0, радиус окружности при выбранном масштабе равен $r = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Во сколько раз максимально возможный КПД второй машины отличается от максимально возможного КПД первой машины?

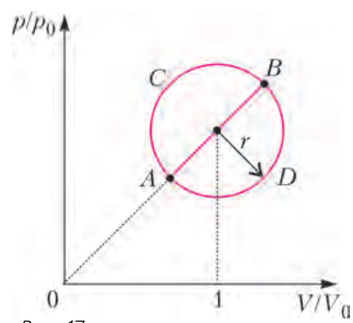


Рис. 17

К.Парфенов

4. В точке A, расположенной на расстоянии r от центра O незаряженной проводящей сферы радиусом R, находится точечный заряд q (рис.18). Сферу заземляют длинным тонким проводником. На сколько изменится (после заземления) потенциал точки B, являющейся вершиной равностороннего треугольника ABO?

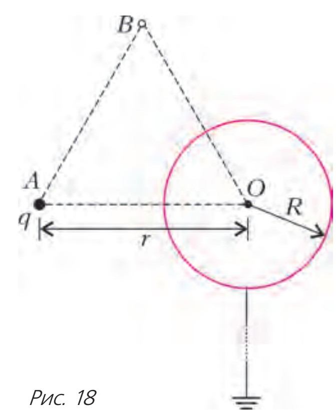


Рис. 18

А.Бычков

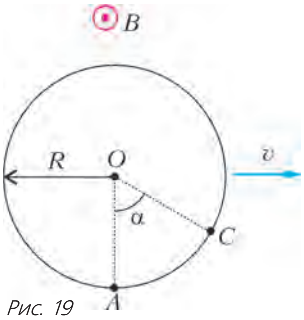


Рис. 19

5. Незаряженный металлический шар радиусом $R = 10$ см движется в однородном магнитном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции $\vec{B}$ с постоянной скоростью $v = 1$ м/с (рис.19). Поверхностная плотность зарядов на «полюсе» шара в точке A оказалась равной σ_0. Определите поверхностную плотность зарядов в точке C, направление на которую из центра шара составляет угол $\alpha = 60°$ с направлением OA. Чему равна разность потенциалов точек A и C? Модуль вектора индукции магнитного поля $B = 2$ Тл.

А.Бычков

Публикацию подготовили
М.Семенов, А.Якута

XXIV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии МГУ имени М.В.Ломоносова, Института педагогических исследований одаренности РАО (г. Новосибирск) и при поддержке Международной ассоциации «Педагогика одаренности и таланта», Фонда «1С», Издательского Дома «Первое сентября» и журналов «Квант», «Потенциал» и «Физика для школьников» провел очередную международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон» для учащихся 9–11 классов.

Олимпиада проходила с 4 по 11 октября 2015 года в городе Сочи (Россия), на территории уютного санатория«Белые ночи», который расположен на берегу Черного моря. На олимпиаду приехали участники из разных регионов России и дистанционно участвовали команды Казахстана и Белоруссии. В качестве наблюдателей были представители Израиля. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В двенадцатый раз участвовали в олимпиаде школьники, интересующиеся экологией и биологией, соревнуясь в индивидуальных турах по биологии и экологии. Педагоги и психологи собрались на свою научную сессию в седьмой раз.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2015» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда лицея 1 «Классический» из Ростова-на-Дону. Ей был вручен главный приз соревнований – суперкубок и призы от спонсоров. Команда была также лучшей в турах по математике и физике, а по истории научных идей и открытий – была призером. Второе место в общем зачете заняла команда лицея 2 из Альметьевска. Она также заняла первое место по истории научных идей и открытий и второе место по математике и физике. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла вторая команда лицея 1 из Ростова-на-Дону. Она также заняла призовые места во всех турах олимпиады, ей были вручены кубок и дипломы.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем стал Дмитрий Финагеев, ему были вручены большие золотые медали по математике и физике. Вторым призером в общем зачете стал Роман Зудин. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Никита Коломоец. Денис Шеремет получил малую серебряную медаль по математике, Сергей Гладченко – малую бронзовую медаль по математике. Антон Переплетчиков получил малую серебряную медаль по физике, Даниил Тяпкин – малую бронзовую медаль по физике. Все победители и призеры – ученики лицея 1 «Классический» из Ростова-на-Дону.

Уже четвертый раз встречаются на Международном математическом турнире имени М.В.Ломоносова младшие школьники (5–8 классы), являясь олимпийским резервом олимпиады «Интеллектуальный марафон». Число участников турнира растет, что усиливает накал интеллектуальных соревнований среди младших школьников.

Командные соревнования «Математический биатлон» для 7–8 классов завершились победой команды лицея 1 «Классический» из Ростова-на-Дону. Победителем в индивидуальных соревнованиях среди учащихся 7–8 классов стал Дмитрий Виноградский (лицей 1 «Классический», Ростов-на-Дону). Призерами стали Альберт Рафиков, Эдуард Сабиров и Камиль Самигуллин (лицей 2, Альметьевск). Среди учащихся 5–6 классов победителем стал Вячеслав Батальщиков, призерами стали Валерий Радченков и Никита Бойков (все – из лицея 1, Ростов-на-Дону). Традиционный приз «Берестяная тарелка» был вручен Ивану Ежову (лицей 1, Ростов-на-Дону) и Кариму Терегулову (лицей 2, Альметьевск).

Все победители и призеры получили подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Кубки, кубки ...

Мал, да удал

Жюри отдыхает

ОЛИМПИАДА ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ НАУКАМ

МАТЕМАТИКА

Устный командный тур

1. Сколько дней (суток) может быть в 11 месяцах, идущих подряд? Укажите все возможные варианты.

2. Вася на несколько лет моложе Пети. В 2015 году возраст каждого из них равен сумме цифр его года рождения. В каком году родился Вася и в каком Петя?

3. При каких простых значениях p число p^2+11 имеет ровно 6 делителей?

4. Можно ли числа 1, 2, …, 20 расставить в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, было равно среднему арифметическому чисел, стоящих на концах этого ребра?

5. Известно, что все цифры десятичной записи числа 2^{29} различны. Есть ли среди этих цифр 0?

6. Разрежьте произвольный треугольник на 4 выпуклые фигуры: шестиугольник, пятиугольник, четырехугольник и треугольник.

7. Набор из 100 чисел таков, что 2015 попарных произведений этих чисел отрицательны. Сколько в этом наборе нулей?

8. Пусть M – точка внутри параллелограмма $ABCD$. Что больше: сумма расстояний от точки M до вершин параллелограмма или его периметр?

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1, \\ y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}. \end{cases}$$

10. Числа $0<x_i<1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют соотношению

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n).$$

Найдите наибольшее возможное значение произведения $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$.

Письменный индивидуальный тур

1. В какой системе счисления число 31 делится на 13?

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен во внешнюю сторону квадрат $ABDE$. В каком отношении биссектриса угла C делит отрезок DE, если $AC = b$, $BC = a$?

3. Назовем месяц трудным, если в нем лишь четыре воскресенья. Могут ли: а) три; б) четыре месяца подряд быть трудными?

4. Представьте число 2015 в виде суммы наименьшего возможного количества четвертых степеней натуральных чисел.

5. Известно, что среди членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ есть числа a_1^2, a_2^2, a_3^2. Верно ли, что все члены прогрессии – целые числа?

6. Периметр четырехугольника равен 2016, а одна из его диагоналей равна 1007. Может ли вторая диагональ быть равной: а) 1; б) 2; в) 1007?

7. Назовем два натуральных числа соседними, если их десятичные записи отличаются только одной цифрой в одном из разрядов (например, числа 23578 и 23478 – соседние). Какое наибольшее количество n-значных чисел можно выбрать так, чтобы среди них не было соседних?

История научных идей и открытий

1. В 1948 году один знаменитый математик в соавторстве с известным физиологом А.Розенблатом опубликовал фундаментальный труд, в котором были сформулированы основные положения новой науки. Важнейшим понятием этой науки является обратная связь – воздействие процесса или объекта на самого себя.

Кто этот математик и как называется созданная им наука?

2. Великий французский математик, физик, философ и писатель XVI века впервые точно сформулировал и впервые применил метод математической индукции.

Назовите имя этого человека.

3. Пьер Ферма (1601–1665) – автор выдающихся работ по теории чисел и другим разделам математики – сформулировал и доказал утверждение о том, что всякое нечетное простое число однозначно представимо в виде разности двух квадратов натуральных чисел.

Докажите это утверждение.

4. Две фигуры одинаковой площади называются равносоставленными, если одну из них можно разрезать на части, из которых можно сложить другую. В первой половине XIX века была совершенно элементарно доказана теорема Бойаи–Гервина: любые два многоугольника одинаковой площади равносоставлены. В одном из доказательств этой теоремы используются такие леммы:

а) любой треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником;

б) любой параллелограмм равносоставлен с прямоугольником, одна из сторон которого равна стороне параллелограмма;

в) любой многоугольник можно разрезать на треугольники.

Докажите эти леммы.

5. Выдающийся немецкий математик XIX века Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859) доказал одну из важнейших теорем теории чисел: во всякой бесконечной арифметической прогрессии, первый член которой и разность – взаимно простые натуральные числа, содержится бесконечно много простых чисел.

Пользуясь теоремой Дирихле, докажите, что существует бесконечно много простых чисел p таких, что оба числа p + 2 и p − 2 составные.

ФИЗИКА

Устный командный тур

1. Может ли спортсмен на водных лыжах двигаться быстрее катера?

2. На столбе на высоте H = 10 м укреплен тревожный звонок. Начался ураган, скорость ветра в урагане 20 м/с. В каком месте на земле звук тревоги будет слышен громче всего? Скорость звука 330 м/с.

3. С какой минимальной горизонтальной силой надо действовать на брусок массой 2 кг, находящийся на наклонной плоскости с углом наклона 30°, чтобы он покоился? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость 0,3.

4. Деревянный шарик, вмороженный в кусок льда, удерживается внутри цилиндрического стакана с помощью нити, прикрепленной к дну. Лед с шариком целиком погружен в воду и не касается стенок и дна сосуда. После того как лед растаял, шарик остался плавать внутри стакана, целиком погруженный в воду. Сила натяжения нити во время таяния льда уменьшилась в n раз ($n > 1$), уровень воды в стакане уменьшился на ΔH ($\Delta H > 0$). Чему равен объем шарика, если плотность воды $\rho_в$, плотность дерева ρ, площадь внутреннего сечения стакана S?

5. Три одинаковых шара, связанных двумя одинаковыми пружинами, подвешены вертикально на нити, привязанной к верхнему шару. Какими будут ускорения шаров сразу после пережигания нити?

6. Один из участников олимпиады заблудился в лесу. Стемнело. Вдруг он обо что-то споткнулся. При свете спички он увидел металлическую водопроводную трубу. Как он может определить, в какую сторону течет вода по трубе?

7. Будет ли происходить смена дня и ночи на Земле, если она перестанет вращаться вокруг своей оси?

8. Как измерить температуру тела человека в Сахаре обычным медицинским ртутным термометром, если температура воздуха в тени больше 42 °С ?

Экспериментальные задания

9. Демонстрируется странное стеклышко. Объясните наблюдаемое явление, приведите примеры применения таких свойств.

10. Демонстрируется модель вечного двигателя. Объясните физику наблюдаемого явления.

Письменный индивидуальный тур

Задача 1. Переправа … переправа

Человек на лодке должен попасть из пункта A, расположенного на одном берегу реки, в пункт B на противоположном берегу ниже по течению (рис.1). Расстояние $BC = s$ = 150 м. Ширина реки $AC = d$ = = 200 м. С какой наименьшей скоростью $v_л$ относительно воды и под каким углом α к берегу должна плыть лодка, чтобы приплыть в пункт B, не меняя курса? Скорость течения реки $v_р$ = 2 м/с. Сколько времени понадобится на переправу?

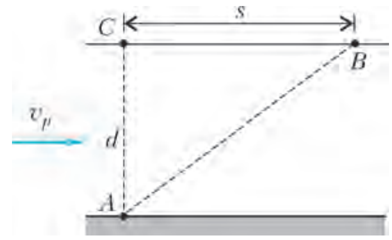


Рис. 1

Задача 2. Нерастяжимая нить

На столе примерно в одном месте находятся шарики массами M = 400 г и m = 100 г, связанные исходно ненатянутой нитью. Шарику массой m сообщают скорость v = 10 м/с (рис.2). В момент когда нить оказывается натянутой, она образует угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением первоначального движения шарика массой m. Найдите скорость шарика массой M сразу, как нить натянется. Нить нерастяжима. Трения нет.

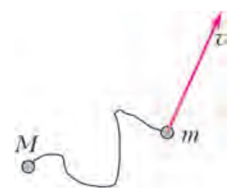


Рис. 2

Задача 3. Молекула водорода

Нильс Бор в 1913 году дал описание модели молекулы водорода. Согласно Бору, два внешних электрона двух атомов водорода, образующих молекулу, вращаются по одной и той же круговой орбите вокруг линии, проходящей через ядра обоих атомов, и удерживают последние на определенном расстоянии друг от друга (рис.3). Боровская

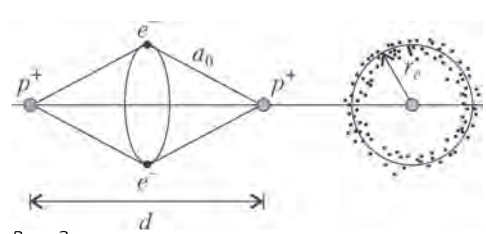


Рис. 3

модель химической связи давала четкую картину образования молекулярного водорода как динамическое равновесие системы, содержащей два протона, удерживающихся на определенном расстоянии d друг от друга притяжением кольца из двух электронов. Исходя из того что для атома водорода известен первый боровский радиус орбиты электрона a_0 = 53 пм, найдите радиус обобщенной орбиты электронов r_e. Какова орбитальная скорость электронов? Чему равно d?

Задача 4. Хитрый цилиндр

Поршень массой m = 20 кг и сечением $S = 100$ см^2 в исходном горизонтальном положении цилиндра находится

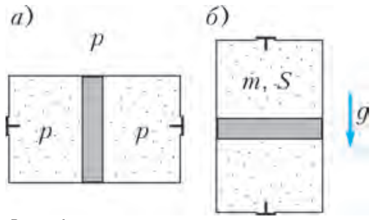


Рис. 4

посередине (рис.4,*а*). Слева и справа от поршня – воздух при атмосферном давлении $p = 10^5$ Па. Клапан в торце цилиндра открыт только тогда, когда торец обращен строго вниз. Цилиндр поворачивают на $90°$, приведя его в вертикальное положение (рис.4,*б*). Какая доля воздуха выйдет из цилиндра? При какой массе поршня он опустится на нижний торец? Трения нет. Температура неизменна. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Задача 5. Гравитационное взаимодействие света

Как известно, свет обладает корпускулярными свойствами и, следовательно, как частица – гравитационными свойствами. Эйнштейн в своей формуле указал на связь энергии и массы: $E = mc^2$. С другой стороны, по гипотезе Планка, энергия кванта света (фотона) равна $E = h\nu$, где h – постоянная Планка, ν – частота излучения. Иными словами, если измерить частоты фотонов в двух точках на разных расстояниях от поверхности Земли: в точке испускания и в точке поглощения, то за счет гравитационного взаимодействия измеренные частоты в околоземных условиях будут близкими, но разными. Поэтому оценивают только относительное смещение этих частот.

Оцените относительное гравитационное смещение частоты излучения водородного лазера, установленного на спутнике, вращающемся на стационарной орбите, относительно частоты излучения лазера, принятого наземным наблюдателем. Радиус Земли R = 6400 км, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Задача 6. Тепловая машина

Тепловая машина, рабочим телом которой является одноатомный идеальный газ, работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух участков, на которых давление пропорционально объему. Определите КПД этой машины, если отношение объемов на изохорных процессах равно 3, а коэффициенты пропорциональности относятся как 1 : 2.

Задача 7. Шар и куб

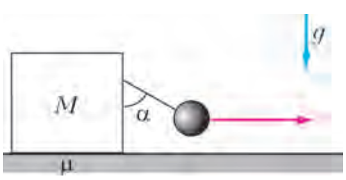


Рис. 5

Тяжелый шар привязан нитью к кубу массой M = 4 кг (рис.5). За другую нить шар тянут горизонтально так, что он и куб движутся с постоянной скоростью. Наклонная нить образует угол $\alpha = 45°$ с вертикалью. Найдите массу шара, если коэффициент трения куба о пол $\mu = 0{,}5$.

История научных идей и открытий

1. Нобелевская премия 1915 года была вручена «за заслуги в исследовании структуры кристаллов с помощью рентгеновских лучей». Премию получили английские ученые – отец и сын, ставший самым молодым лауреатом за всю историю премии. Однако у этого открытия был еще один автор – русский кристаллограф. Эти исследования положили начало очень важному научно-техническому направлению – рентгеноструктурному анализу, поскольку позволили связать в единое уравнение длину волны рентгеновского излучения, расстояние между кристаллографическими плоскостями и угол, под которым наблюдается дифракционный максимум. Помимо уравнения, описывающего закон дифракции, английский физик создал первый прибор для регистрации дифракционной картины и вместе с сыном разработал основы метода определения структуры кристаллов по дифракционной картине рентгеновских лучей. Использование этого прибора позволило им установить структуру многих простых кристаллов, первым из которых был NaCl. Оба английских физика, и отец и сын, долго и плодотворно работали и внесли большой вклад в развитие мировой науки.

1) Назовите лауреатов Нобелевской премии по физике 1915 года.

2) Назовите русского ученого, независимо от английских физиков получившего упомянутое уравнение.

2. В предыдущем вопросе речь шла об отце и сыне, получивших Нобелевскую премию по физике одновременно. Однако история науки знает и другие случаи, когда физики, отец и сын, получали этот высший знак признания научных заслуг с разницей во времени, каждый за свои работы.

Назовите этих ученых и направления работ, за которые были получены Нобелевские премии.

3. В предыдущем вопросе говорилось об открытии Нильса Бора, приведшем к созданию атомной физики и квантовой механики, – о разработке планетарной модели атома. Для проверки этой тогда еще гипотезы двумя немецкими физиками были поставлены опыты по соударению электронов с атомами. Некоторые историки утверждают, что эти опыты ставили своей целью опровержение гипотезы Бора, другие – что работа велась для подтверждения этой гипотезы. Как бы то ни было, экспериментальные результаты подтвердили справедливость постулатов Бора.

1) Кто эти ученые?

2) Какие именно результаты экспериментов показали справедливость постулатов Бора?

4. Кавказское побережье Черного моря – это не только курортная зона, не только олимпийские и другие спортивные и туристские объекты, не только важные в экономическом отношении порты, но и серьезная научная база. В столице Абхазии городе Сухуми в середине XX века был создан уникальный институт, занимавшийся первоочередной в то время физической проблемой. Там работали многие выдающиеся немецкие физики, специалисты в области квантовой механики, лабораториями заведовали Нобелевский лауреат Густав Людвиг Герц и «немецкий Эдисон» Манфред фон Арденне. Здесь был установлен первый в Закавказье циклотрон, разработан первый в Советском Союзе масс-спектрометр.

1) Как называется этот институт?

2) Какие проблемы являлись главными в его работе в середине XX века?

5. В первой трети XX века была известна только одна ядерная частица – протон. Однако к началу 30-х годов стало ясно, что в составе атомного ядра должны быть еще и нейтральные частицы. Советские физики В.А.Амбарцумян и Д.Д.Иваненко, немецкие физики В.Боте и Г.Бекер, французские ученые Ирен и Фредерик Жолио-Кюри в разных экспериментах показали необходимость наличия такой частицы. Английскому физику, ученику Э. Резерфорда, удалось экспериментально установить ее существование. В 1935 году за эту работу ему была присуждена Нобелевская премия по физике.

1) Кто этот ученый?

2) Какую частицу он открыл и каковы ее основные свойства?

IV МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5–8 КЛАССОВ

Устный командный тур

5–6 классы

1. Разрежьте прямоугольник $ABCD$ на три равные по площади части двумя прямыми, проходящими через точку A.

2. Имеется 6 одинаковых с виду монет: 3 настоящих и 3 фальшивых, которые легче настоящих и имеют одинаковый вес. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти две настоящие монеты?

3. Можно ли таблицу 7×7 клеток заполнить числами 1, 2, 3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была четной, а в каждом столбце нечетной?

4. Будет ли простым число $2016^4 + 2016^2 + 1$?

7–8 классы

1. Чему равно произведение $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots$ $\ldots\left(1-\frac{1}{2025}\right)$?

2. Дано 2016 чисел. Известно, что сумма любых пяти из них положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна? Ответ обоснуйте.

3. В треугольнике ABC точки K и L – основания высот, опущенных на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что отрезок, соединяющий середину отрезка KL с серединой отрезка AC, перпендикулярен отрезку KL.

4. Представьте число $\left(\frac{17^2+19^2}{2}\right)^2$ в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

5. Окружность касается сторон угла с вершиной M в точках A и B, отрезок AC – диаметр окружности. Прямая, проходящая через точку B параллельно стороне MA угла, пересекает диаметр AC в точке D и отрезок MC – в точке N. Докажите, что $BN = ND$.

6. Решите систему

$$\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=225, \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=144. \end{cases}$$

Письменный индивидуальный тур

5–6 классы

1. Какой длины получится полоса, если кубический километр разрезать на кубические метры и выложить их в одну линию?

2. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько непересекающихся квадратиков так, чтобы сумма периметров этих квадратиков оказалась больше 2015?

3. Может ли число, записанное с помощью одних только цифр 8, делиться на число, записанное с помощью нескольких цифр 9? А наоборот?

4. На клетчатой бумаге дан квадрат $ABCD$ размером 6×6 клеток. На стороне AB взята точка M так, что $2AM = MB$. Где на диагонали AC выбрать точку N так, чтобы угол MND был прямым?

5. На плоскости дан прямоугольник, в котором расположен круг. Как провести линию, которая разрезает пополам и прямоугольник, и круг?

7–8 классы

1. Даны две дроби $\frac{200\ldots01}{200\ldots02}$ и $\frac{200\ldots03}{200\ldots04}$, в числителях и знаменателях которых записаны 100-значные числа, а вместо точек в записи стоят нули. Определите, какая из этих дробей больше другой. Ответ обоснуйте.

2. Начиная с числа 1, записали подряд все натуральные числа до числа 2015 включительно и получили запись натурального числа M. Найдите остаток, который получится при делении M на 9.

3. В квадрате $ABCD$ на стороне AB взята точка M так, что $AM = MB$, а на диагонали AC – точка N так, что отрезок NC равен одной четвертой диагонали. Докажите, что угол MND прямой.

4. Докажите, что число $2015^4 + 4$ не является простым.

5. В равнобедренном треугольнике ABC со сторонами $AB = BC = 8$, $AC = 4$ на стороне BC выбрана точка K так, что окружности, вписанные в треугольники ABK и ACK, касаются друг друга. Найдите отношение $BK : KC$.

Публикацию подготовили А.Альминдеров, В.Дубровский, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштоп, А.Марковичев

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная школа СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 50 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗШ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам ЗШ в форме факультативных занятий с группой учащихся.

Ежегодно лучшие ученики 8–10 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, без вступительных экзаменов. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учеником ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых вы хотите учиться, свои фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой или заказной бандеролью. Необходимо присылать решенное задание того класса, в котором вы будете учиться в Заочной школе.

Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде, необходи-

мые документы и подробную информацию о ЗШ можно найти на сайте заочной школы: http://zfmsh.nsu.ru
Наш почтовый адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ
Телефон/факс: (383) 363-40-66
E-mail: distant@sesc.nsu.ru или zfmsh@yandex.ru

ПЕРВЫЕ ЗАДАНИЯ НА 2016/17 УЧЕБНЫЙ ГОД

Математическое отделение

МАТЕМАТИКА

5 класс

1. Каждую из сторон прямоугольника, периметр которого равен 26,8 см, увеличили на 1 см. Найдите, на сколько при этом увеличилась площадь прямоугольника.

2. Представьте дробь $\frac{17}{4620}$ в виде суммы двух дробей с меньшими знаменателями.

3. Из спичек составили неправильное равенство V − I = IX. Покажите, как можно переложить только одну спичку, чтобы получилось правильное равенство.

4. Шестиугольник составлен из шести одинаковых треугольников, имеющих равные стороны (рис.1). Разделите этот шестиугольник на восемь одинаковых частей.

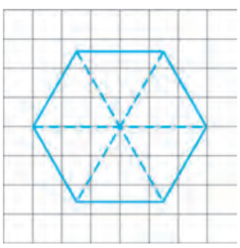


Рис. 1

5. Найдите, на какую цифру в примере $864-{*}68$ нужно заменить звездочку, чтобы полученная разность делилась на 9.

6. В ящике находится 140 карандашей, которые разложены по трем коробкам, причем известно, что в какой-то из коробок в 2 раза больше карандашей, чем в какой-то другой коробке, и в какой-то из коробок в 3 раза больше карандашей, чем в какой-то другой коробке. Определите число карандашей в каждой коробке.

6 класс

1. См. задачу 3 для 5 класса.

2. На числовой прямой вычисляется сумма расстояний от точки, изображающей число x, до пяти точек, изображающих числа 1, 2, 3, 5, 7. Найдите, какое наименьшее значение может принимать эта сумма.

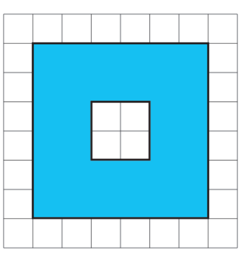


Рис. 2

3. Изображенную на рисунке 2 фигуру разрежьте на части, из которых можно составить квадрат.

4. Найдите, на какую цифру в примере $98765-4321^{*}$ нужно заменить звездочку, чтобы полученная разность делилась на 9.

5. Найдите количество всех двузначных чисел, в десятичной записи которых не встречается цифра 5.

6. В ящике находятся 153 карандаша, которые разложены по трем коробкам, причем известно, что в какой-то из коробок в 2 раза больше карандашей, чем в какой-то другой коробке, и в какой-то из коробок в 3 раза больше карандашей, чем в какой-то другой коробке. Определите число карандашей в каждой коробке.

7 класс

1. За контрольную работу каждый из 25 учащихся получил одну из оценок 3, 4, 5. Когда вычислили сумму всех оценок, то получили число 106. Найдите, на сколько больше было поставлено «пятерок», чем «троек».

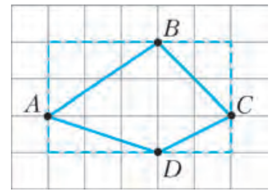


Рис. 3

2. На клетчатой бумаге задан четырехугольник $ABCD$ (рис. 3), и для каждой точки M плоскости вычисляется сумма расстояний AM, BM, CM, DM. Найдите, какое наименьшее значение может принимать эта сумма, если стороны квадратов сетки равны 0,4 см.

3. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 250 меньше, чем произведение двух следующих за ними натуральных чисел.

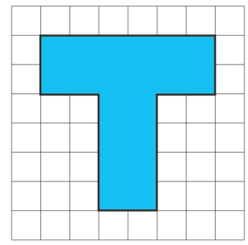


Рис. 4

4. Изображенную на рисунке 4 фигуру разрежьте на части, из которых можно составить квадрат.

5. Найдите вероятность того, что случайно выбранное трехзначное число не имеет в своей десятичной записи цифры 5.

6. Бригада из нескольких рабочих за семь полных дней может выполнить такое задание, какое может выполнить эта бригада без двух человек за несколько полных дней. Найдите, какое наибольшее число рабочих могло быть в этой бригаде первоначально (предполагается, что производительность рабочих одинакова).

8 класс

1. При $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$, $d \ge 0$ упростите выражение

$$\sqrt{a+b+c+d+2\sqrt{ac+ad+bc+bd}}+$$
$$+\sqrt{a+b+c+d-2\sqrt{ac+ad+bc+bd}}.$$

2. Найдите четыре последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых равна сумме квадратов трех следующих за ними натуральных чисел.

3. Решите уравнение $2\left(x^3+1\right)=7\left(x^2-1\right)$.

4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK, BL, CM пересекаются в точке H, точки E и F – середины отрезков AH и BH соответственно, прямые ME и AC пересекаются в точке P, прямые MF и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \parallel AB$.

5. Найдите сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$, если $a_k=4k^3-6k^2+4k$ при каждом натуральном k.

6. Бригада из нескольких рабочих за семь полных дней может выполнить такое задание, какое может выполнить эта бригада без двух человек за несколько полных дней и без шести человек за несколько полных дней. Найдите, какое число рабочих было в этой бригаде первоначально (предполагается, что производительность рабочих одинакова).

9 класс

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{4x+3}=\sqrt{x+3}$.

2. В треугольнике ABC, площадь которого равна 24, точка K – середина стороны BC, точки L и M расположены на продолжениях сторон AB и AC соответственно так, что $BL=\frac{1}{3}AB$, $CM=\frac{1}{4}AC$. Найдите площадь треугольника KLM.

3. При $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ упростите выражение

$$\sqrt{2a+b+c+2\sqrt{a^2+ab+ac+bc}}-$$
$$-\sqrt{2a+b+c-2\sqrt{a^2+ab+ac+bc}}.$$

4. См. задачу 4 для 8 класса.

5. Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, если $a_k = 2k^3 - 3k^2 + 2k$ при каждом натуральном k.

6. Докажите, что из любых 11 целых чисел всегда можно выбрать ровно шесть, сумма которых делится на 6.

10 класс

1. Найдите количество всех четырехзначных чисел, у которых только одна из цифр делится на 3.

2. Стартовав на стадионе в разных направлениях, два спортсмена поравнялись через 30 секунд. Если бы они стартовали в одном направлении, то впервые поравнялись бы через 30 минут. Найдите, за какое время быстрейший из этих спортсменов пробежит полный круг.

3. Найдите сумму всех действительных корней уравнения $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 3 = 0$.

4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AK, BL, CM пересекаются в точке H. На продолжении высоты CM откладывается отрезок MN, равный отрезку MH, и проводится перпендикуляр NP к прямой AC. Докажите, что $PM \parallel KL$.

5. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 100 меньше произведения двух других последовательных натуральных чисел (рассмотрите все возможные случаи).

6. Бригада из нескольких рабочих за 14 полных дней может выполнить такое задание, какое может выполнить эта бригада без трех человек за несколько полных дней и без пяти человек за несколько полных дней. Найдите, сколько рабочих было в этой бригаде первоначально (предполагается, что производительность рабочих одинакова).

11 класс

1. Определите, при каких целых значениях x функция $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 17}{x - 2}$ принимает наименьшее целое значение.

2. В одном барабане находится 8 шаров, из которых 3 шара красного цвета, в другом барабане – 7 шаров, из которых 4 красного цвета. С равной вероятностью выбирают один из барабанов, а затем из него вынимают один шар. Найдите вероятность того, что этот шар будет красного цвета.

3. Найдите сумму всех действительных корней уравнения $x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$.

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 1000 меньше произведения двух других последовательных натуральных чисел (рассмотрите все возможные случаи).

6. В правильной четырехугольной пирамиде ребро основания равно 6, высота равна 4. Найдите площадь перпендикулярной проекции этой пирамиды на плоскость боковой грани.

Физическое отделение

ФИЗИКА

7 класс

1. Измерьте длину своего шага. Пользуясь этой «мерой», определите расстояние между двумя соседними домами. Оцените погрешность измерения.

2. Измерьте размеры комнаты, например класса, рулеткой – длину, ширину, высоту. Определите площадь в квадратных метрах, объем в кубических метрах. Оцените разницу результатов.

3. Попробуйте оценить ошибку каждого из определяемых выше параметров.

4. Попытайтесь с помощью обычной линейки измерить толщину отдельного листа бумаги вашего учебника.

5. Пассажир поезда заметил, что встречный поезд длиной $L = 200$ м прошел мимо него за время $t = 10$ с. Каковы скорости поездов, если известно, что в момент встречи поезда шли с одинаковыми скоростями?

8 класс

1. До какой высоты H надо налить воду в сосуд, дно которого квадрат со стороной $a = 5$ см, а стенки вертикальны, чтобы сила давления на дно была равна силе давления на одну из стенок?

2. Вес куска стекла в воздухе $P_1 = 2{,}1$ Н, а в воде $P_2 = 1{,}26$ Н. Найдите плотность стекла.

3. Велосипедист первую треть пути проехал со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, а оставшиеся две трети – со скоростью $v_2 = 30$ км/ч. Найдите среднюю скорость на всем пути.

4. Тело массой $m = 1$ кг с начальной скоростью $v = 14$ м/с падает с высоты $H = 240$ м и углубляется в песок на глубину $h = 0{,}3$ м. Найдите среднюю силу сопротивления песка F.

5. Два поезда одинаковой длины $L = 800$ м движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 72$ км/ч и $v_2 = 108$ км/ч. Сколько времени они будут проходить друг мимо друга?

9 класс

Рис. 5

1. Из подручных средств делаются рычажные весы (рис.5). Используются две линейки, два спичечных коробка и немного ниток. Одна линейка ставится вертикально, на нее серединой накладывается вторая линейка и к ее концам прикрепляются спичечные коробки. В левую коробку кладут гирю массой $M = 50$ г. Определите, при какой массе в правой коробке весы будут сохранять равновесие. Размер линейки $a \times b \times c = 30 \times 3 \times 0{,}3$ см. Масса линейки $m = 10$ г, массой остальных предметов можно пренебречь.

2. Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B в момент времени $t_1 = 10$ ч и двигались прямолинейным маршрутом с одинаковой скоростью, намереваясь прийти в пункт сбора C в момент $t_2 = 14$ ч, но встретились в момент $t_3 = 13$ ч 30 мин вне пункта C, обнаружив, что идут в перпендикулярных направлениях. Когда, двигаясь с прежней скоростью, туристы придут в пункт сбора после правильной коррекции маршрута?

3. В заполненную водой цилиндрическую колбу насыпали некоторое количество мелких пластиковых шариков – они образовали слой высотой $H = 10$ см, затем сверху начали аккуратно насыпать свинцовые дробинки. Когда свинцовые шарики образовали слой высотой $h = 2{,}9$ мм, оба слоя погрузились в воду. Определите плотность пластика. Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность свинца 11340 кг/м^3.

4. На электроплитку поставили кастрюлю с водой. После того как вода нагрелась до $t_1 = 70$ °C плитку выключили. Оставаясь на выключенной плитке, кастрюля нагрелась до $t_2 = 80$ °C. После этого горячую воду из кастрюли вылили, заменили ее вдвое меньшим количеством воды из-под крана с температурой $t_3 = 20$ °C и вновь поставили на теплую электроконфорку – вода нагрелась на $\Delta t = 5$ °C . Определите температуру включенной электроконфорки. Теплоемкостью кастрюли и потерей тепла можно пренебречь.

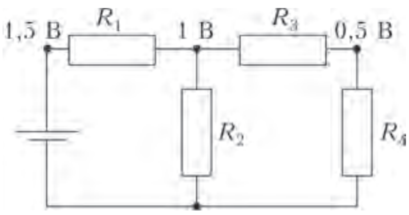


Рис. 6

5. В изображенной на рисунке 6 схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 1$ Ом и $R_4 = 2$ Ом и указаны напряжения некоторых точек относительно отрицательного полюса батарейки. Определите сопротивления резисторов R_2 и R_3.

10 класс

1. С одинаковой начальной скоростью v одновременно бросили два мяча: один вверх, второй вниз с высоты h. Мячи столкнулись в воздухе, прежде чем какой-либо из них упал на землю. На какой высоте они столкнулись? При какой минимальной скорости v это было возможно?

2. Мальчик бросил камень перпендикулярно берегу реки. Камень упал в воду на расстоянии L от берега, на котором стоял мальчик. От места падения камня пошла волна, которая впервые достигла этого берега через время t_1 после падения камня, а через время t_2 она плеснула у ног мальчика. Определите скорость течения реки.

3. Ракета массой m стартует под углом к горизонту и попадает в точку на крутом склоне горы, удаленную от места старта на L по горизонтали и на H по вертикали. Определите силу тяги двигателя ракеты, если она во время полета не менялась и была направлена под углом α к горизонту. Изменением массы ракеты пренебречь. Ускорение свободного падения равно g.

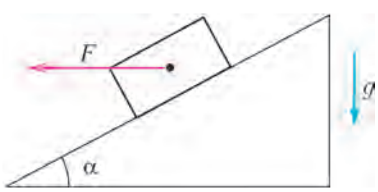


Рис. 7

4. Брусок массой m лежит на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис.7). На него действует горизонтальная сила F, направленная по склону. Определите ускорение бруска. Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ.

5. Цилиндрический сосуд с площадью сечения S закрыт подвижным поршнем, в который смонтирована трубка высотой h_1 малого сечения (рис.8). Под поршнем в равновесном состоянии находятся два слоя жидкостей одинаковой высоты H. Плотности жидкостей ρ_1 и ρ_2, причем $\rho_2 > \rho_1$. В трубке жидкость образует столбик высотой h. Какую силу нужно приложить к поршню, чтобы он опустился на дно?

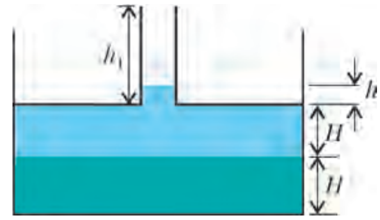


Рис. 8

11 класс

1. Из точки, расположенной на расстоянии L от дома, мальчик вертикально бросает мяч со скоростью u. Одновременно другой мальчик с расположенного на высоте h балкона этого дома горизонтально бросает другой мяч, и мячи сталкиваются в воздухе. На какой высоте они столкнулись?

2. Решите задачу 4 для 10 класса.

3. Решите задачу 5 для 10 класса.

4. Банджи-джампер (англ. bungee jumping – широко распространенный в мире аттракцион, часто называемый в России «тарзанка») прыгает с высокого моста на упругом канате длиной L. Какую максимальную скорость он разовьет во время прыжка, если низшая точка падения находится на h ниже моста? Ускорение свободного падения равно g.

5. Половину закрытого цилиндрического сосуда высотой $2h$ заполняет жидкость плотностью ρ, в которой плавает тонкий поршень. Верхняя часть сосуда содержит воздух при давлении p_0. После того как сосуд перевернули и заполненная жидкостью половина сосуда оказалась наверху, воздух через зазор между поршнем и стенками цилиндра начал медленно просачиваться. Определите давление в нижней части сосуда, когда там останется столб воздуха высотой x. Температура не меняется. Ускорение свободного падения равно g.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Таких примеров очень много, вот некоторые из них: 11 и 22 ($11 + 22 = 33$, $11 \cdot 22 = 242$), 12 и 21 ($12 + 21 = 33$, $12 \cdot 21 = 252$), 18 и 37 ($18 + 37 = 55$, $18 \cdot 37 = 666$).

2. Один из возможных ответов приведен на рисунке 1.

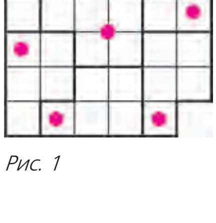


Рис. 1

3. По условию, на всех клетках лежит разное число зерен. Каким может быть наименьшее возможное число зерен на доске? Самое маленькое число зерен на клетке – это 0, следующее – 1 и так далее, т.е. всего зерен не меньше $0 + 1 + 2 + \ldots + 62 + 63 = (0 + 63) + (1 + 62) + \ldots + (31 + 32) = 63 \cdot 32 = 2016$. Значит, впервые история могла произойти в 2016 году. Но в каждый следующий год зерна тоже можно разложить, как требуется – например, добавляя по зернышку на клетку с наибольшим числом зерен. Поэтому про следующие годы нельзя сказать «наконец-то настал такой год, что…», и история произошла в 2016 году.

4. Соединив середины противоположных сторон прямоугольника, мы разобьем его на 4 одинаковых прямоугольничка меньшего размера. Стороны ромба будут диагоналями этих прямоугольничков. Но диагональ исходного прямоугольника складывается из двух диагоналей прямоугольничков (рис.2), т.е. сторона ромба равна половине диагонали исходного прямоугольника.

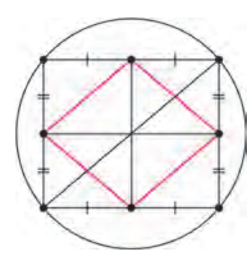


Рис. 2

Поскольку центр описанной окружности прямоугольника – точка пересечения его диагоналей, сторона ромба равна радиусу описанной окружности исходного прямоугольника, т.е. 5 см.

5. Будем обозначать принадлежность к первому клану буквой A, а ко второму – буквой $Б$. Каждому рыцарю сопоставим пару – сам этот рыцарь и следующий за ним против часовой стрелки. Пары бывают четырех типов: AA, $ББ$, $AБ$ и $БA$, а всего пар столько же, сколько всего рыцарей. По условию, пар типа AA и $ББ$ столько же, сколько пар $AБ$ и $БA$, обозначим это количество за x. Тогда общее число рыцарей будет равно $2x$.

Теперь разобьем сидящих за столом на группы рыцарей одного клана, сидящих подряд (в группе может быть и один рыцарь), так, чтобы группы разных кланов чередовались. Так как рыцари сидят по кругу, число групп первого клана будет равняться числу групп второго клана. Но в каждой группе найдется ровно один рыцарь, справа от которого сидит рыцарь другого клана (самый правый в группе). Значит, число групп первого клана равно числу пар вида $AБ$, а число групп второго клана равно числу пар вида $БA$. Получается, что пар вида $AБ$ столько же, сколько пар вида $БA$, но суммарное их число равно x – значит, x четно. Тогда общее число рыцарей, равное $2x$, делится на 4.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №1)

11. а) $2016 = 252 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;
б) $2016 = 252 \cdot (2 \cdot 5 - 2)$.

12. Не могло.
Предположим противное, и пусть суммы оказались равны a, $a + 1$, …, $a + 13$. Так как сумма Петиных чисел равна сумме Васиных чисел (и то и другое – сумма всех чисел в таблице), то числа a, $a + 1$, …, $a + 13$ можно разбить на две группы по 7 чисел с равными суммами. Но тогда сумма всех чисел $S = 14a + (1 + 2 + \ldots + 13)$ четна, что неверно.
Замечание. Утверждение задачи можно усилить: 14 сумм из условия задачи не могут являться даже последовательными 14-ю членами арифметической прогрессии. Предположим противное, и пусть суммы оказались равны a, $a + d$, …, $a + 13d$. Числа a, $a + d$, …, $a + 13d$ можно разбить на две группы по 7 чисел с равными суммами. Но тогда (вычитаем из сумм по $7a$ и сокращаем на d) то же верно для чисел 0, 1, 2, …, 13. Далее используем соображение четности, как в решении задачи.

13. 4.
Пусть для определенности $x \ge y$, тогда наше выражение равно $\frac{(2x)^2}{xy} = \frac{4x}{y} \ge 4$. Равенство достигается при $x = y$.

14. Для n = 4, 6, 8, 10, 12.
Отложим от начала координат всевозможные векторы длины 5, имеющие целые координаты, таких векторов 12 штук (рис. 3). Пусть дан выпуклый n-угольник, удовлетворяющий условию задачи. При обходе его контура по часовой стрелке каждый из данных 12 векторов может встретиться не более одного раза, значит, $n \le 12$. Окрасим все целочисленные вершины в «шахматном» порядке (точки, у которых абсцисса и ордината одинаковой четности, окрашены черным, а точки, у которых абсцисса и ордината разной четности, окрашены белым). Как видим, каждый из наших векторов соединяет точки разных цветов, поэтому при обходе контура нашего n-угольника цвета чередуются, значит, n – четно. Остается привести примеры для n, указанных в ответе. Для n = 12 достаточно отложить последовательно друг за другом все 12 векторов $a_1, a_2, \ldots, a_6, -a_1, -a_2, \ldots, -a_6$. Для n = 10 аналогично откладываем векторы $a_1, a_2, \ldots, a_5, -a_1, -a_2, \ldots, -a_5$ и т.д., для n = 4 откладываем векторы $a_1, a_2, -a_1, -a_2$.

15. Предположим, что ученый не ошибся. Возьмем пару ученых A, B. У них есть пара общих знакомых C и D. Но тогда для пары C, D пара A, B является единственной парой общих знакомых. Сопоставим паре A, B пару C, D. Как видим, это соответствие взаимно однозначно, поэтому количество пар ученых должно быть четно. С другой стороны, это количество пар равно $\frac{2015 \cdot 2014}{2} = 2015 \cdot 1007$ – нечетное число. Противоречие.

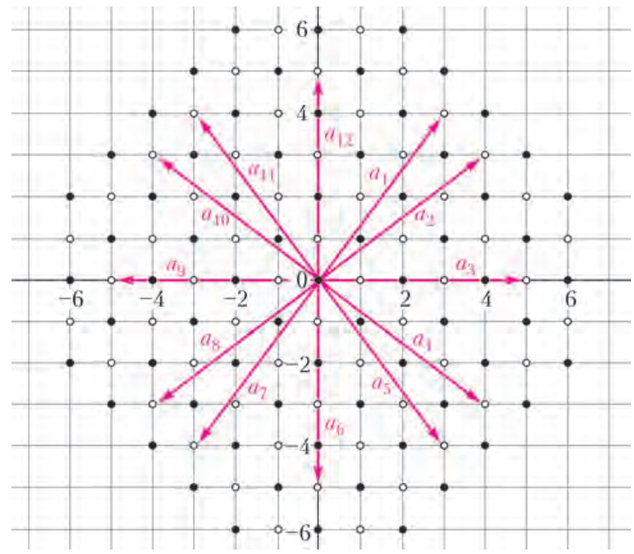


Рис. 3

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Нельзя. Заряд на «лейденской банке» будет очень малым. На изолированной обкладке вследствие индукции возникнут и будут удерживаться на ней заряды обоих знаков. Прибор не будет конденсатором.

2. Увеличится в полтора раза.

3. а) При постоянстве напряжения между обкладками; б) при постоянстве зарядов.

4. $k = \frac{1}{\varepsilon + 1}$.

5. Эквивалентная схема представлена на рисунке 4. Разность потенциалов между точками A и B равна нулю. Общая емкость батареи равна $2C$.

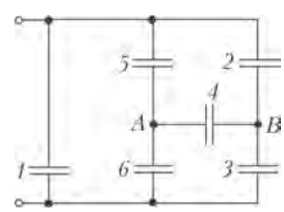


Рис. 4

6. $C_x = C$.

7. Образовавшийся сложный конденсатор можно рассматривать как батарею, состоящую из трех одинаковых конденсаторов емкостью C_0 (рис.5). Общая емкость системы равна $2/3C_0$.

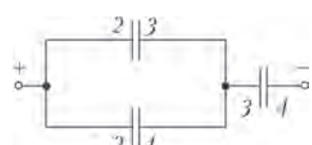


Рис. 5

8. Уменьшилась в 4 раза. После подключения у двух конденсаторов останется только половина начальной энергии заряженного конденсатора, которая распределится между конденсаторами поровну.

9. Пластина втянется внутрь конденсатора (краевой эффект).

10. Не изменится.

11. Возможно, если до подключения конденсатор емкостью C_2 зарядить до разности потенциалов $\mathscr{E}$.

12. Емкость места разрыва очень мала и емкостное сопротивление в связи с этим очень велико, поэтому ток прекращается.

13. При замкнутом ключе переменный ток протекает через лампу в течение каждого полупериода.

14. Собственные колебания в контуре не изменятся.

15. Через одну восьмую периода: колебания энергии в катушке и в конденсаторе происходят в противофазе с частотой, в два раза большей собственной частоты контура.

МИКРООПЫТ

Натерев друг о друга бумагу и пластик, вы сообщили им разноименные заряды. Поднеся эти предметы к струйке воды, вы образовали плоский конденсатор, в поле которого струйка электризуется и отклоняется к одной из его пластин.

УРАВНЕНИЯ СВЯЗЕЙ В МЕХАНИКЕ

1. $a_B = a\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{3}{2}\right)\mathrm{tg}^2\alpha}$.   **2.** $a = g\sin\frac{\alpha}{2}$.

3. $\omega = \frac{v}{H}\sin^2\alpha$.   **4.** а) $v_{\text{оси}} = \frac{\omega R}{\sin\alpha}$; б) $v_{\text{кас}} = \omega R\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}$.

XXIV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

ОЛИМПИАДА ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ НАУКАМ

Математика

Устный командный тур

1. 334, 335, 336 или 337.   **2.** 2011, 1993.   **3.** $p = 3$.

4. Нельзя.

Указание. Числа в вершинах имеют одинаковую четность, но 1 и 20 могут стоять только в вершинах.

5. Есть.

Указание. Число $2^{29} = 1024^2 \cdot 512 > 10^8$ и потому состоит не менее чем из 9 цифр. Если среди них нет 0, то это все цифры от 1 до 9. Но тогда их сумма, а значит, и само число кратны 3.

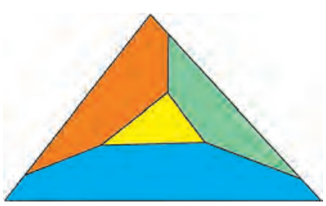


Рис. 6

6. См. рис.6.   **7.** 4.

8. Периметр больше.

Указание. Пусть, для определенности, точка M лежит внутри треугольника OAB, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, т.е. внутри каждого из треугольников ABC и BAD. Тогда $AM + MC \le AB + BC$ (равенство только при $M = B$) и $BM + MD \le BA + AD$ (равенство при $M = D$). Остается сложить эти неравенства.

9. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.   **10.** 2^{-n}.

Письменный индивидуальный тур

1. В системе по основанию 5.

Искомое основание b системы больше 3, так как среди цифр в этой системе есть 3. Условие делимости числа $3b + 1$ на $b + 3$ равносильно тому, что $\frac{3b+1}{b+3} = 3 - \frac{8}{b+3}$ – целое число, т.е. $b + 3$ – делитель 8. Единственное число, удовлетворяющее этим условиям, это $b = 5$.

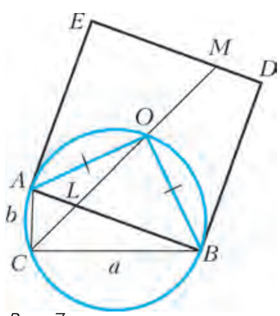


Рис. 7

2. $b : a$.

Заметим, что биссектриса угла C проходит через центр O квадрата (рис.7). Действительно, точка O лежит на описанной окружности треугольника ABC, так как $\angle ACB = \angle AOB = 90°$. Теперь равенство углов ACO и BCO следует из того, что они вписаны в эту окружность и опираются на равные хорды AO и OB. Поскольку O – центр симметрии квадрата, прямая CO делит стороны AB и CD на соответственно равные отрезки: $AL = DM$, $LB = ME$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL : LB = AC : AB = b : a$, а значит, $DM : ME = AL : LB = b : a$.

3. а) Могут; б) не могут.

а) Пример трех трудных месяцев подряд – февраль, март и апрель 2016 года.

б) Четыре трудных месяца содержат 16 воскресений. Но наименьшее число дней в 4 месяцах подряд, очевидно, равно $31 + 28 + 31 + 30 = 120$ (январь – апрель невисокосного года), а любые 120 дней содержат 17 полных недель ($7 \times 17 = 119$), а значит, 17 воскресений. Поэтому все такие месяцы трудными быть не могут.

4. $2015 = 6^4 + 5^4 + 3^4 + 13 \cdot 1^4$ (16 слагаемых).

Заметим, что если число a нечетно, $a = 2n + 1$, то a^4 дает остаток 1 при делении на 16. (Действительно, поскольку $n(n+1)$ четно, то $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1 = 8k + 1$, где k – целое; поэтому $a^4 = (8k+1)^2 = 16(4k^2 + k) + 1$.) С другой стороны, остаток числа 2015 при делении на 16 равен 15. Следовательно, в искомой сумме не менее 15 нечетных слагаемых. Поскольку $7^4 = 2401 > 2015$, такая сумма может содержать только члены вида $5^4 = 625$ (не более трех), $3^4 = 81$ и 1^4. Наибольшие суммы, содержащие 3, 2 и 1 слагаемое вида 5^4 и не превосходящие 2015, равны $3 \cdot 5^4 + 3^4 + 11 \cdot 1^4 = 1967$, $2 \cdot 5^4 + 9 \cdot 3^4 + 4 \cdot 1^4 = 1983$ и $5^4 + 14 \cdot 3^4 = 1759$. Все они меньше 2015, а суммы, не содержащие 5^4, очевидно, меньше последней из указанных. Значит, требуется не менее 16 слагаемых; соответствующий пример приведен в ответе.

5. Верно.

Пусть d – разность данной прогрессии. Числа

$$a_2^2 - a_1^2 = (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) = d(2a_1 + d) \text{ и } a_3^2 - a_2^2 = d(2a_1 + 3d)$$

как разности членов этой прогрессии кратны d, значит, $2a_1 + d$ и $2a_1 + 3d$ – целые. Поэтому $2d = (2a_1 + 3d) - (2a_1 + d)$ – целое число, т.е. d – полуцелое (кратно $1/2$). Значит, число $n = 4a_1 = 2(2a_1 + d) - 2d$ – целое, т.е. a_1, а с ним и все члены прогрессии кратны $1/4$. Если n нечетно, то $a_1^2 = \frac{n^2}{16}$ не кратно $1/4$, поэтому n – четно. Но тогда $a_1 = 1/4$ – полуцелое число; значит, и все члены прогрессии полуцелые. Поэтому $m = 2a_1$ и $d = (2a_1 + d) - m$ – целые. В частности, число $a_1^2 = \frac{m^2}{4}$ – полуцелое. Следовательно, m четно, а $a_1 = m/2$ – целое. Итак, доказано, что первый член прогрессии и ее разность – целые числа. Следовательно, все члены прогрессии целые.

6. а) Не может; б), в) может.

Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, P – его периметр, O – точка пересечения его диагоналей.

а) По неравенству треугольника, $AB < AO + OB$. Аналогичные неравенства выполняются и для трех других сторон четырехугольника. Складывая все четыре неравенства, получим $P < 2(AC + BD)$, что неверно при $P = 2016$ и $AC + BD = 1007 + 1 = 1008$.

б) *Указание.* Рассмотрите вырожденные четырехугольники с $B = C$ и с D на AC или на продолжении.

в) Покажем, что существует прямоугольник с периметром 2016 и диагоналями длины 1007. Это можно сделать из соображений непрерывности, как в п. б), или непосредственно решив систему уравнений для его сторон a и b: $a + b = 1008$, $a^2 + b^2 = 1007^2$. Легко видеть, что ее решения – это корни квадратного уравнения $2x^2 - 2016x + 2015 = 0$, имеющего положительный дискриминант.

7. $9 \cdot 10^{n-2}$.
Ясно, что в каждом десятке последовательных чисел, т.е. среди чисел от $10N + 1$ до $11N$, можно выбрать не более одного числа. Количество n-значных чисел равно $10^n - 10^{n-1} = 9 \cdot 10^{n-1}$, они разбиваются на $9 \cdot 10^{n-2}$ десятков. Это дает верхнюю оценку для искомого количества попарно несоседних n-значных чисел. Выбрать из каждого десятка одно число так, чтобы среди выбранных чисел не оказалось соседних, можно, например, так: суммы цифр всех чисел в одном десятке при делении на 10 дают по разу все остатки от 0 до 9; выберем среди них число с суммой цифр, кратной 10.

История научных идей и открытий

1. Норберт Винер, кибернетика.
2. Блез Паскаль.
3. *Указание.* Простое число p имеет единственное разложение на натуральные множители: $p = p \cdot 1$. Если $p = n^2 - m^2 = (n+m)(n-m)$, то $n + m = p$, $n - m = 1$.
4. *Указание.* а), б) И в треугольнике, и в параллелограмме высота проводится к наибольшей стороне, чтобы ее основание падало на саму эту сторону, а не на ее продолжение (рис.8).

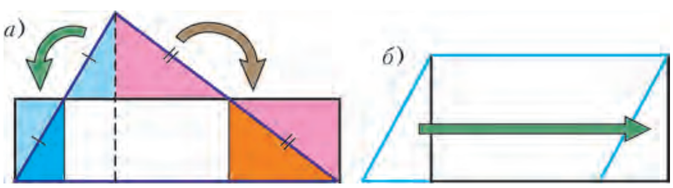


Рис. 8

в) Разрежем многоугольник по всем прямым, соединяющим пары его вершин. Тогда он распадется на выпуклые многоугольники, которые разрезаются на треугольники диагоналями, выходящими из одной вершины.
5. Достаточно указать какую-нибудь арифметическую прогрессию a_n, удовлетворяющую условиям теоремы Дирихле, для которой все числа, отличающиеся от ее членов на 2, составные. По этой теореме в ней бесконечно много простых чисел; они и будут искомыми. Такой прогрессией является, например, $a_n = 15n + 7$. Действительно, $a_n + 2 = 15n + 9$ делится на 3 (и не равно 3), а $a_n - 2 = 15n + 5$ делится на 5 (и не равно 5 при $n > 0$).

Физика

Устный командный тур

1. Может. **2.** На расстоянии $l = H \dfrac{v_в}{v_{зв}} \approx 0{,}61$ м.

3. $F = mg \dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \approx 4{,}7$ Н. **4.** $V = \dfrac{\rho_в S \Delta H}{(n-1)(\rho_в - \rho)}$.

5. Нижний шар будет иметь нулевое ускорение, средний шар будет двигаться с ускорением g, верхний – с ускорением $2g$.
6. Нужно на ощупь оценить температуру трубы в двух достаточно разнесенных точках. Если температура трубы ниже температуры окружающего воздуха, то вода течет от более холодной к более теплой точке, если же температура трубы выше температуры окружающего воздуха, то наоборот. В случае равенства температур трубы и воздуха определить направление течения таким способом невозможно.
7. Смена дня и ночи будет происходить с периодом 1 год.
8. Нужно обеспечить теплоизоляцию тела человека от окружающей среды, например с помощью плотной белой одежды. Тогда внутри одежды температура будет равна температуре человеческого тела.

Письменный индивидуальный тур

1. $v_л = v_р \cos\alpha = 1{,}2$ м/с, $t = \dfrac{d}{v_л \sin\alpha} = 208{,}3$ с $= 3$ мин $28{,}3$ с.
2. Сила натяжения нити направлена вдоль нити, поэтому шарик массой M приобретет импульс по направлению нити. Из сохранения импульса вдоль нити имеем $(M+m)u = mv\cos\alpha$, и $u = \dfrac{mv\cos\alpha}{M+m} = 1$ м/с.
3. Такая система зарядов образует ромб со стороной a_0, большая диагональ соединяет неподвижные протоны и равна d, а меньшая – это диаметр окружности вращения двух электронов, равный $2r_e$ (рис. 9), причем $d = 2a_0\cos\alpha$ и $r_e = a_0 \sin\alpha$. На каждый протон действуют три силы – сила кулоновского отталкивания другого протона и две силы кулоновского притяжения электронов, причем сумма всех сил равна нулю.

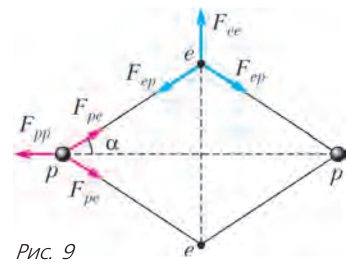


Рис. 9

Отсюда находим

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad r_e = a_0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 46 \text{ пм}, \quad d = a_0 = 53 \text{ пм}.$$

На каждый электрон действуют две силы притяжения протонов и одна сила отталкивания второго электрона. Для нахождения скорости электронов запишем второй закон Ньютона и получим

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{4mr_e}\left(8\sin^3\alpha - 1\right)} = 2404 \text{ км/с}.$$

4. Искомая доля составит

$$\frac{mg}{2(pS - mg)} = \frac{1}{8}.$$

Заметим, что при $m = pS/(2g) = 50$ кг поршень выдавит весь газ из нижней части цилиндра, т.е. выйдет ровно половина газа.
5. Если мы говорим о гравитационном взаимодействии света, то необходимо ввести понятие эффективной гравитационной массы: $m = \dfrac{E}{c^2}$. Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, в гравитационном поле Земли

$$E - G\frac{Mm}{R_{ор}^2} = E' - G\frac{Mm'}{R^2}, \text{ или } h\nu - G\frac{Mh\nu}{R_{ор}^2 c} = h\nu' - G\frac{Mh\nu'}{R^2c^2},$$

где M – масса Земли, $R_{ор}$ – радиус стационарной орбиты, на которой находится испускающий лазер, E' и m' – энергия и эффективная масса фотона на поверхности Земли.
По второму закону Ньютона для вращательного движения, $G\dfrac{Mm_c}{R_{ор}^2} = m_c\omega^2 R_{ор}$, где $m_с$ – масса спутника, $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24\text{ ч})$ – угловая скорость вращения спутника. Отсюда

$$R_{ор} = \sqrt[3]{G\frac{M}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi}} \approx 42{,}3 \cdot 10^3 \text{ км}, \text{ и } \frac{gR}{c^2}\frac{R}{R_{op}} \ll \frac{gR}{c^2}.$$

Тогда закон сохранения энергии примет вид $h\nu = h\nu' - h\nu'\dfrac{gR}{c^2}$, откуда

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{gR}{c^2} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-10}.$$

6. Цикл тепловой машины изображен на рисунке 10. В процессе *1–2–3* газ получил от нагревателя тепло $Q_н$, а в процессе *3–4–1* отдал холодильнику тепло $Q_х$. КПД тепловой

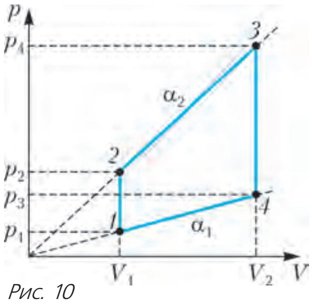


Рис. 10

машины равен

$$1-\frac{Q_х}{Q_н}=0{,}119=11{,}9\% .$$

7. Так как куб движется с постоянной скоростью, то векторная сумма сил, действующих на каждое из тел, равна нулю . Отсюда находим массу шара: $m=M\dfrac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha-\mu}=4$ кг .

История научных идей и открытий

1. 1) Уильям Генри Брэгг и Уильям Лоренс Брэгг. 2) Георгий (Юрий) Викторович Вульф.
2. Джозеф Джон Томсон, 1906 г., «в знак признания его теоретических и экспериментальных исследований, посвященных проводимости электричества газами» и Джордж Паджетт Томсон (совместно с Джозефом Дэвиссоном), 1937 г., «за экспериментальное открытие дифракции электронов на кристаллах»; Нильс Хенрик Давид Бор, 1922 г., «за заслуги в исследовании строения атомов и испускаемого ими излучения» и Оге Нильс Бор (в содружестве с Беном Роем Моттельсоном и Лео Джеймсом Рейнуотером), 1975 г., «за открытие взаимосвязи между коллективным движением и движением отдельной частицы в атомном ядре и развитие теории строения атомного ядра, основанной на этой взаимосвязи». Интересно заметить, что Бор-младший родился в год получения Бором-старшим Нобелевской премии.
3. 1) Густав Людвиг Герц и Джеймс Франк. 2) Опыт Франка и Герца показал, что спектр поглощаемой атомом энергии не непрерывен, а дискретен и что минимальная порция поглощаемой энергии может быть рассчитана по теории Бора.
4. 1) Сухумский физико-технический институт. 2) Основными направлениями работы были разделение радиоактивных изотопов в целях разработки ядерного оружия и работы в области управляемого термоядерного синтеза.
5. 1) Джейм Чедвик. 2) Эта частица – нейтрон. Масса нейтрона почти равна массе протона и составляет примерно 1839 масс электрона. Суммарный электрический заряд нейтрона равен нулю.

IV МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5–8 КЛАССОВ

Устный командный тур

5–6 классы

1. Площадь треугольника ABK равна площади четырехугольника $AKCL$ и равна площади треугольника ADL.
2. Можно. **3.** Нельзя.
4. Число $2016^4+2016^2+1=\left(2016^2-2016+1\right)\left(2016^2+2016+1\right)$ – составное.

7–8 классы

1. $\dfrac{23}{45}$. **2.** Верно.
3. *Указание.* Медиана прямоугольного треугольника равна половине его гипотенузы.
4. 260^2+195^2 .
5. Через точку C параллельно MA проведем прямую, пересекающую сторону угла MB в точке P. Обозначим $AM=MB=x$, $PB=PC=y$. Из соотношения $\dfrac{BN}{PC}=\dfrac{MB}{MP}$ следует, что $BN=PC\cdot\dfrac{MB}{MP}=y\cdot\dfrac{x}{x+y}$, из соотношения $\dfrac{DN}{AM}=\dfrac{CN}{CM}=\dfrac{BP}{MP}$ следует, что $DN=AM\cdot\dfrac{BP}{MP}=x\cdot\dfrac{y}{x+y}$. Таким образом, $BN=ND=\dfrac{xy}{x+y}$.
6. $x=100$, $y=80$; $x=-900$, $y=720$.

Письменный индивидуальный тур

5–6 классы

1. 1000000 км. **2.** Можно.
3. Число, запись которого состоит из 27 восьмерок, делится на 999. Число, записанное с помощью одних только цифр 9, нечетно и не может делиться на четное число 8.
4. Точку N нужно взять на диагонали AC так, чтобы $AN=2CN$.
5. Нужно провести прямую, проходящую через центры и прямоугольника, и круга.

7–8 классы

1. Первая из данных дробей меньше второй.
2. Остаток равен 0.
3. Из точки N опустим перпендикуляры NK и NL на стороны AB и AD соответственно. Прямоугольные треугольники KMN и LDN равны, поэтому равны их углы при вершине N. Величина угла MND равна $90^\circ-\angle KNM+\angle LND=90^\circ$.
4. $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2=\left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right)$.
5. $BK:KC=3:1$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, П.А.Кожевников, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473
Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №
Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано
в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

МельницА КАРПОВА

Продолжаем наш рассказ о лучших партиях за полвека (1966–2016), по одному шедевру в год. Напомним, что эта выставка создана на основе самого популярного шахматного издания на планете – «Шахматного информатора». Гроссмейстерское жюри в составе 9 человек выносит свои оценки (по десятибалльной системе), они складываются, и в результате определяется партия-лауреат.

А.Карпов–В.Корчной

Финальный матч претендентов, 2-я партия

Москва, 1974

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘f6 5. ♘c3 g6. 6. ♗e3 ♗g7 7. f3 ♘c6 8. ♕d2 0-0 9. ♗c4 ♗d7 10. h4 ♖c8. Модное некогда перемещение на c8 королевской ладьи (♕a5 и ♖f8-c8) позднее было полностью вытеснено появлением на этом поле ферзевой ладьи. **11. ♗b3 ♘e5 12. 0-0-0 ♘c4. 13. ♗:c4 ♖:c4 14. h5 ♘:h5 15. g4 ♘f6.** У белых здесь есть разные пути развития атаки – 16. ♖dg1, 16. ♘d5, 16. ♗h6, 16. e5. Однако Карпов выбрал скромное отступление конем на e2, специально подготовленное к матчу. **16. ♘de2!?** Смысл этого хода в укреплении пункта c3, поскольку в варианте дракона типовая жертва качества на c3 обычно дает черным богатую контригру. **16...♕a5.** Надежнее 16... ♖e8, чтобы в ответ на 17. ♗h6 отступить слоном в угол. **17. ♗h6 ♗:h6 18. ♕:h6 ♖fc8 19. ♖d3!** Именно этот хитрый ход придумал Карпов. Модные тогда продолжения 19. ♖d5 и 19. g5 не опасны, к тому же Корчной наверняка был готов к ним. **19... ♖4c5?** Поразительно, но уже это отступление ладьи форсированно проигрывает. Упорнее всего было предложенное Ботвинником 19... ♕d8. **20. g5.** Кони c3 и f6 защищают своих королей и поэтому должны держаться до последнего, например, уход черного с f6 сразу повлечет вторжение белого на d5. **20... ♖:g5 21. ♖d5!** Конечно, не 21. ♘d5 ♖:d5, и главный охранник черной крепости, конь f6, остается в живых. **21... ♖:d5 22. ♘:d5 ♖e8.** Ферзь не успевает вернуться в свой лагерь: 22... ♕d8 23. ♘ef4 ♕f8 24. ♘:f6+ и 20. ♕:h7×. Если же 22... ♘h5, то 23. ♘:e7+ и 24. ♘:c8. **23. ♘ef4 ♗c6.** Необходимо взять пункт d5 под контроль, на 23... ♗e6 следовало 24. ♘:e6 fe 25. ♘:f6+ ef 26. ♕:h7+ ♔f8 27. ♕:b7 ♕g5+ 28. ♔b1 ♖e7 29. ♕b8+ ♖e8 30. ♕:a7 (но не 30. ♖h8+?? ♔g7, и выигрывают уже черные, которые грозят 31... ♕g1×) 30... ♖e7 31. ♕b8+ ♖e8 32. ♕:d6+ – своеобразная, редко встречающаяся «мельница».

24. e5! Перерезая всю ту же пятую горизонталь. От обилия эффектных возможностей разбегаются глаза, а между тем только этот прорыв решает.

24... ♗:d5. После 24...de 25. ♘:f6+ ef 26. ♘h5 мат неизбежен. **25. ef ef.** И здесь белым не поздно было проиграть: на 26. ♘h5? (с намерением 26...gh 27. ♖g1+ и 28. ♕g7×) следовало отрезвляющее 26... ♖e1+! **26. ♕:h7+ ♔f8 27. ♕h8+. Черные сдались.** Если 27... ♔e7, то 28. ♘:d5+ ♕:d5 29. ♖e1+.

Первую битву Карпова с Корчным после того, как Фишер отказался от своего титула, фактически можно считать матчем на первенство мира. Карпов выиграл со счетом 12,5:11,5 и в следующем году был провозглашен чемпионом. А данная партия набрала 89 баллов из 90! За всю историю конкурсов красоты никогда больше у гроссмейстерского жюри не было такого единодушия.

А.Карпов–Б.Спасский

Рига, 1975

Новоиндийская защита

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘f3 b6 4. g3 ♗b7 5. ♗g2 ♗e7 6. ♘c3 0-0 7. ♕c2 d5 8. cd ♘:d5 9. 0-0 ♘d7 10. ♘:d5 ed 11. ♖d1 ♘f6 12. ♘e5 c5 13. dc ♗:c5 14. ♘d3 ♗d6 15. ♗f4 ♖e8 16. e3 ♘e4 17. ♗:d6 ♕:d6 18. ♘f4 ♖ac8. Не желая пассивно защищаться, черные завязывают тактические осложнения. **19. ♕a4 ♕e7 20. ♕:a7 ♘:f2 21. ♘:d5.** Конечно, не 21. ♔:f2? ♕:e3+ 22. ♔f1 ♖c2, и черные берут верх. **21... ♗:d5 22. ♕:e7 ♘:d1** Выгоден для белых и эндшпиль, возникающий после 22... ♖:e7 23. ♗:d5 ♘:g4 24. ♗h3 ♘:e3 25. ♗:c8 ♘:d5 26. ♖d1 ♘f6 27. ♖d6 ♖e8 28. ♗f5. **23. ♖c1! ♖b8 24. ♕h4 ♗:g2 25. ♔:g2 ♘:e3+ 26. ♔g1 ♖e6 27. ♕f4 ♖d8 28. ♕d4 ♖de8 29. ♕d7 ♘g4 30. ♖c8 ♘f6.** Вечный шах не получается: 30... ♖e1+ 31. ♔g2 ♖e2+ 32. ♔h3 ♘f2+ 33. ♔h4 ♖e4+ 34. g4 ♖:g4+ 35. ♕:g4. **31. ♖:e8+ ♖:e8 32. ♕b7 ♖e6 33. ♕b8+ ♘e8 34. a4 g6 35. b4 ♔g7 36. ♕b7 h5 37. h3 ♔f6 38. ♔g2 ♖d6 39. a5 ba 40. ba ♖e6 41. a6 ♘c7 42. a7 ♖e7 43. ♕c6+ ♔e5 44. ♔f3. Черные сдались.**

Е.Геллер–А.Карпов

Москва, 1976

Французская защита

1. e4 e6 2. d4 d5 3. ♘c3 ♗b4 4. e5 ♕d7 5. ♘f3 b6 6. ♗d2 ♗a6 7. ♗:a6 ♘:a6 8. 0-0. Черные избрали довольно пассивный план, и Геллер уже по дебюту получил значительный перевес. Конечно, если бы не заключительная комбинация с жертвой ферзя, партия осталась бы незамеченной. **8... ♘b8 9. ♘e2 ♗e7 10. ♖c1 b5** Неизбежный прорыв c2-c4 еще больше увеличит перевес белых. **11. ♘f4 h5 12. b3 ♗a3 13. ♖b1 a5 14. c4 c6 15. c5 ♗b4 16. ♗c1 a4 17. ♘d3 ♗a5 18. ba ba 19. ♕:a4 ♕a7 20. ♗g5 ♗c7 21. ♖:b8+!** Первый эффектный удар, но Геллер, конечно, имел в виду и следующий. **21... ♕:b8 22. ♕:c6+ ♔f8 23. ♘f4 ♖a7 24. ♘h4 ♕e8.** Занятная позиция: белые «вынуждены» нанести эффектный удар, иначе разменивались ферзи, противник забирал пешку и оставался с материальным перевесом.

25. ♕:e6!! Как видите, Карпов умел и красиво выигрывать, и красиво проигрывать. **25...fe 26. ♘fg6+ ♕:g6.** Приходится возвращать ферзя: 26... ♔f7? 27. ♘:h8+ ♔f8 28. ♘hg6+ не спасает. **27. ♘:g6+ ♔e8 28. ♘:h8.** Операция завершилась успешно. **28... ♖a4 29. ♖d1 ♘e7 30. ♗:e7 ♔:e7 31. ♘g6+ ♔f7 32. ♘f4 ♗:e5 33. de ♖:f4 34. ♖c1! ♔e8 35. c6 ♔d8 36. c7+ ♔c8 37. g3 ♖a4 38. ♖c6 ♖:a2 39. ♖:e6 g5 40. ♖d6 ♖d2 41. e6 ♔:c7 42. e7. Черные сдались.**

Е.Гик

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Две радуги

Приведенная здесь фотография иллюстрирует современную версию эксперимента Декарта, описанного в его знаменитых «Рассуждениях о методе».

(Подробнее – в статье «Радуга Декарта–Ньютона–Юнга» внутри журнала)